Sistema de dois níveis

- Estudo geral de sistema de dois níveis.

Motivação $\left\{\begin{array}{l}\text{Existem inúmeros casos onde, em primeira aproximação, um}\\ \text{um sistema complexo pode ser tratado como um sistema de}\\ \text{dois níveis. Em Física, onde aproximações são quase sempre}\\ \text{inevitáveis, vale a pena explorar o assunto. É atraente o fato}\\ \text{que, em geral, o sistema de dois níveis tem solução exata.}\end{array}\right.$

- Em teoria de perturbação, disciplina F789, veremos que a estratégia de "reduzir" um sistema de muitos níveis para um de apenas dois níveis é razoável, em

situações, onde $\left\{\begin{array}{l}|E_1 - E_2| << |E_1(\text{ou } E_2) - E_n| \text{ com } n \geq 3\\ \text{e/ou} \quad (\text{se } W \text{ for um pedaço do acoplamento sem solução exata})\\ |\langle E_1|W|E_2\rangle| >> |\langle E_1(\text{ou } E_2)|W|E_n\rangle \text{ com } n \geq 3.\end{array}\right.$

- Notação e roteiro do problema.

  - Suponha conhecido $\left\{\begin{array}{l}H_0|\varphi_1\rangle = E_1|\varphi_1\rangle\\ H_0|\varphi_2\rangle = E_2|\varphi_2\rangle\end{array}\right.$ com $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$ e $(i, j = 1, 2)$.

  - Queremos resolver $\left\{\begin{array}{l}H|\psi_+\rangle = E_+|\psi_+\rangle\\ H|\psi_-\rangle = E_-|\psi_-\rangle\end{array}\right.$ com $H = H_0 + W$, onde

$$W \textit{ é uma } \underbrace{\textit{perturbação}}_{\text{interna ou externa}} \textit{ que inicialmente foi negligenciada.}$$

Sistema de dois níveis

- Na base (na representação) $\mathcal{E}_2 = \{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}, W$ pode escrito na forma matricial:

$$W \doteq \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\varphi_1|W|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1|W|\varphi_2\rangle \\ \langle\varphi_2|W|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2|W|\varphi_2\rangle \end{pmatrix} \text{onde} \begin{cases} W_{11} \text{ e } W_{22} \text{ são reais,} \\ W_{12} = W_{21}^\star \text{ (complexos).} \end{cases}$$

- ○ Onde usamos que se H_0 e H são Hermiteanos, W também é Hermiteano.
- ○ Se $W = 0$ e $|\psi\rangle$ é um dos $|\varphi' s\rangle,$ o sistema fica para sempre neste estado.
- ○ A idéia é ver o que acontece quando W é ligado com $[H_0, W] \neq 0$ e $[H_0, W] = 0$.

- Consequências do acoplamento $(W \neq 0)$:
- ○ E_1 e E_2 não são mais as energias possíveis do sistema. Agora são E_+ e E_-.

  É possível calcular E_+ e E_- como função de E_1, E_2, W_{11}, W_{22} e W_{12}.
- ○ $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ podem não ser mais estados estacionários $\begin{cases} |\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle, \text{mas} \\ |\psi(t)\rangle \overset{?}{=} \alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle. \end{cases}$
- ○ Isso motiva a questão: qual é o efeito de W sobre os estados estacionários?

  Lembre que a expansão em autokets de H nos ajuda a ver o futuro do sistema.

- Uma das razões de começar esse capítulo com o problema de spin 1/2 foi porque os problemas de 2 níveis podem ser reduzidos ao de spin 1/2.

Sistema de dois níveis

- Aspecto estático (ligue W subitamente): efeitos do acoplamento sobre estados estacionários do sistema. Como obter os autoestados e autovalores de $H = H_0 + W$? Resolva a equação de autovalor $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, ou melhor, escreva a matriz que representa H e a diagonalize.

$$H = H_0 + W \doteq \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 + W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & E_2 + W_{22} \end{pmatrix}$$

- ◦ O complemento B_{IV} do livro texto tem esse exercício resolvido.

$$E_+ = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2}$$
$$E_- = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2}$$

- ◦ Note que se $W = 0$, $\quad E_\pm = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \pm \frac{1}{2}(E_1 - E_2) = \begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases}$

- ◦ O complemento ensina que $\begin{cases} |\psi_+\rangle = +\cos\theta/2 e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + \sin\theta/2 e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle \\ |\psi_-\rangle = -\sin\theta/2 e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + \cos\theta/2 e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle \end{cases}$

onde θ e φ são definidos por $\begin{cases} \tan\theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}} \\ W_{21} = |W_{21}|e^{i\varphi} \end{cases} \Rightarrow W_{12} = 0 \begin{cases} |\psi_+\rangle = |\varphi_1\rangle \\ |\psi_-\rangle = |\varphi_2\rangle \end{cases}$

Tudo que é interessante parece estar em $W_{12} = W_{21}^\star \neq 0$. *E* W_{11} *e* W_{22}?

Sistema de dois níveis

- Se $W_{12}=0 \begin{cases} |\psi_+\rangle = |\varphi_1\rangle \\ |\psi_-\rangle = |\varphi_2\rangle \end{cases}$ $\Rightarrow$ os mesmo estados estacionários, mas com energias

$$\neq's \begin{cases} E_+ = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2} = E_1 + W_{11} \\ E_- = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2} = E_2 + W_{22} \end{cases}$$

- Os termos W_{11} e W_{22}, na ausência de W_{12} (caso, onde $[H_0, W]$), causam apenas um deslocamento na energia. Isso sugere que podemos considerar $W_{11} = W_{22} = 0$, sem perder efeitos físicos interessantes.

- Nestas condições, temos $\begin{cases} E_\pm = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|W_{12}|^2} \\ \tan\theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1 - E_2} \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi \\ W_{21} = |W_{21}|e^{i\varphi} \end{cases}$

- Fazendo uma troca de variáveis $\begin{cases} E_m = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \\ \Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2) \end{cases}$ notamos que apenas $E_\pm$ depende de E_m (ponto médio entre E_+ e E_-). As variáveis θ e φ não dependem de E_m. De fato $\begin{cases} \varphi \text{ depende só de } W_{12} \\ \theta \text{ depende de } \Delta \text{ e } W_{12} \end{cases}$ $\therefore |\psi_\pm\rangle$ não dependem de E_m.

- Nossa intenção agora é estudar os efeitos do acoplamento W sobre as energias E_+ e E_-, em função dos valores de E_1 e E_2. Assumiremos W_{12} fixo.

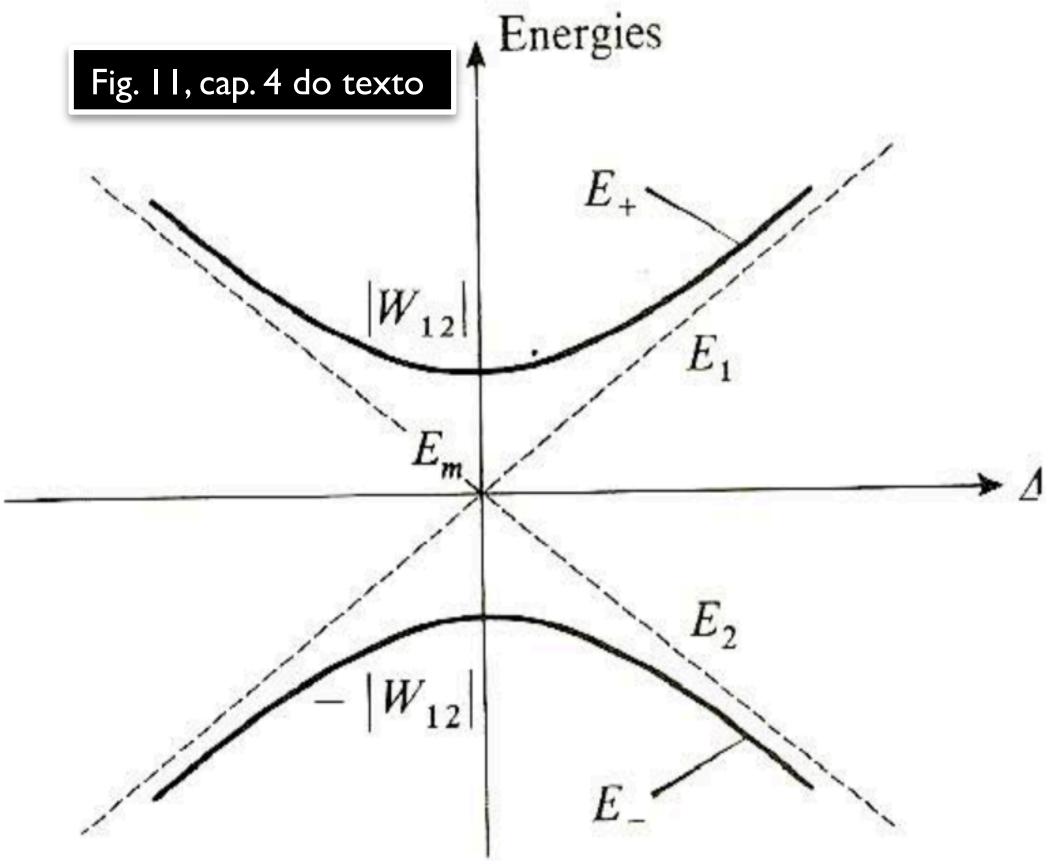
Sistema de dois níveis

- Para W_{12} fixo, a figura mostra nas curvas cheias a dependência de $E_\pm$ com Δ

isto é $\begin{cases} E_+ = E_m + \sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2} \\ E_- = E_m - \sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2} \end{cases}$ e nas curvas tracejadas a dependência de

E_1 e E_2 com Δ $\begin{cases} E_1 = E_m + \Delta \\ E_2 = E_m - \Delta \end{cases}$ $\Rightarrow$ Lembre que isso é obtido para $W_{12} \to 0$.

Fig. 11, cap. 4 do texto



Observações

- $|E_+ - E_-| > |E_1 - E_2|$ (os níveis se repelem!)
- Se $|\Delta| >> |W_{12}|$ e $\Delta > 0$, E_+ se aproxima de E_1, E_- se aproxima de E_2, e ambos com $\dfrac{|W_{12}|^2}{2\Delta}$.
- Se $|\Delta| \sim 0$ (degenerado) $E_\pm = E_m \pm |W_{12}|$ (linear em W_{12})

Sistema de dois níveis

- Para perceber a forma como E_+ e E_- se aproximam de E_1 ou E_2, dependendo do sinal de Δ, para $|\Delta| >>> |W_{12}|$, basta fazer a expansão de $E_\pm = E_m \pm \sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2}$.

  Isto dá $E_\pm = E_m \pm |\Delta|\sqrt{1 + \frac{|W_{12}|^2}{\Delta^2}} \approx E_m \pm |\Delta|\left(1 + \frac{1}{2}\left|\frac{W_{12}}{\Delta}\right|^2 + ...\right)$ que pode ser dividido em dois casos:

$$\text{se } \Delta > 0 \qquad E_\pm \approx E_m \pm \Delta \pm \frac{1}{2}\frac{|W_{12}|^2}{|\Delta|} = \begin{cases} E_1 + \frac{1}{2}\frac{|W_{12}|^2}{|\Delta|} \\ \\ E_2 - \frac{1}{2}\frac{|W_{12}|^2}{|\Delta|} \end{cases}$$

$$\text{se } \Delta < 0 \qquad E_\pm \approx E_m \mp \Delta \pm \frac{1}{2}\frac{|W_{12}|^2}{|\Delta|} = \begin{cases} E_2 + \frac{1}{2}\frac{|W_{12}|^2}{|\Delta|} \\ \\ E_1 - \frac{1}{2}\frac{|W_{12}|^2}{|\Delta|} \end{cases}$$

- **Efeito do acoplamento sobre os autoestados.**

  Olharemos o impacto de $\begin{cases} \Delta << |W_{12}| \text{ (acoplamento forte)} \\ \Delta >> |W_{12}| \text{ (acoplamento fraco)} \end{cases} \Rightarrow$ em $|\psi_\pm\rangle$

  Vimos que $\tan\theta = \frac{|W_{12}|}{\Delta}$ $\therefore$ se $\begin{cases} \Delta << |W_{12}| \Longrightarrow \theta \to \pi/2 \\ \Delta >> |W_{12}| \Longrightarrow \theta \to 0 \end{cases}$

Sistema de dois níveis

- O que acontece com $\begin{cases} |\psi_+\rangle = +\cos\theta/2 e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + \sin\theta/2 e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle \text{ e} \\ |\psi_-\rangle = -\sin\theta/2 e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + \cos\theta/2 e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle ? \end{cases}$

  - **Perturbação forte:**

$$\theta \to \pi/2 \begin{cases} |\psi_+\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}\big(+ e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle\big) \\ |\psi_-\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}\big(- e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle\big) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{estados originais} \\ \text{ficam equiprováveis} \end{cases}$$

  - **Perturbação fraca:**

$$\theta \to 0 \text{ (primeira ordem em } \theta) \begin{cases} |\psi_+\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}\big(+ e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + e^{+i\varphi/2}\frac{\theta}{2}|\varphi_2\rangle\big) \\ |\psi_-\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}\big(- e^{-i\varphi/2}\frac{\theta}{2}|\varphi_1\rangle + e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle\big) \end{cases}$$

$$\text{Neste caso } \theta = \frac{|W_{12}|}{\Delta} \begin{cases} |\psi_+\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}\big(+ e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + e^{+i\varphi/2}\frac{|W_{12}|}{2\Delta}|\varphi_2\rangle\big) \\ |\psi_-\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}}\big(- e^{-i\varphi/2}\frac{|W_{12}|}{2\Delta}|\varphi_1\rangle + e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle\big) \end{cases}$$

A presença de $|W_{12}|$ mistura os estado originais para novos estados estacionários.

$$\theta \to 0 \ (|W_{12}| = 0) \begin{cases} |\psi_+\rangle = +e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle \\ |\psi_-\rangle = +e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{perturbação desprezível} \\ \text{estados originais mantidos} \end{cases}$$

- *O que fizemos até aqui foi estudar os efeitos de W sobre os estados estacionários. Falta ainda estudar os efeitos de W sobre um sistema que se encontra no estado $|\psi(0)\rangle$. Antes disso, daremos alguns exemplos de problemas complexos importantes que podem ser aproximados com essa estratégia.*

Sistema de dois níveis

- Sabemos que a molécula de Benzeno pode ter três ligações duplas entre seus seis carbonos. A figura reflete isso. Ao construir as funções de onda $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ com as configurações da figura, encontramos:

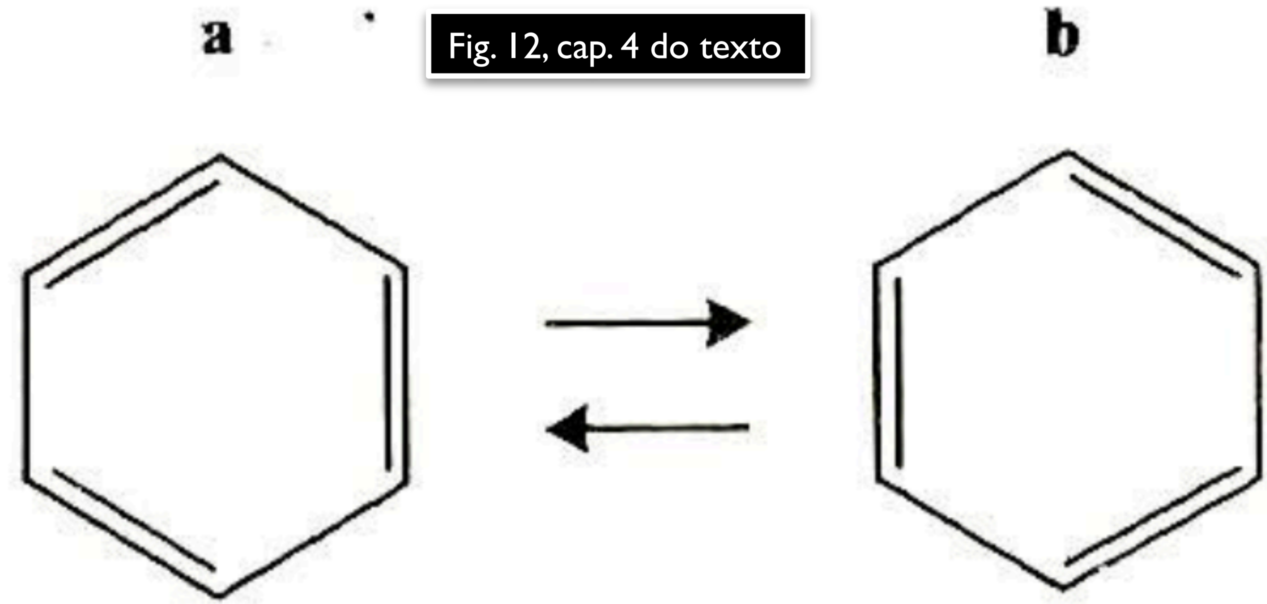
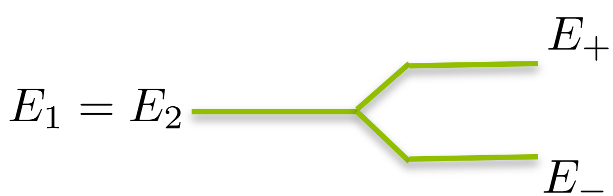


Fig. 12, cap. 4 do texto

$$E_1 = E_2 = E_m$$

As soluções aproximadas, que fixam as ligações duplas, conforme a figura, fornecem: $\langle\varphi_1|H|\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2|H|\varphi_2\rangle = E_m$, mas $\langle\varphi_1|H|\varphi_2\rangle \neq 0$. A solução correta delocaliza as ligações duplas e é obtida por uma combinação de $|\varphi_1\rangle$ com $|\varphi_2\rangle$.



$$E_- < E_1 = E_2$$

Sistema de dois níveis

- Outro caso interessante é o íon da molécula de Hidrogênio. Cada átomo de H tem um próton e um elétron (e^-). No caso do íon, H_2^+, arranca-se um e^- do H_2. O e^- que sobra é disputado pelos dois prótons. Uma solução aproximada poderia ser obtida com auxílio do átomo isolado. O ket $|\varphi_1\rangle$ representa o e^- preso no próton p_1 e o $|\varphi_2\rangle$ representa o e^- preso no próton p_2. A figura reflete isso. Ao construir as funções de onda $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ com as configurações da figura, encontramos:

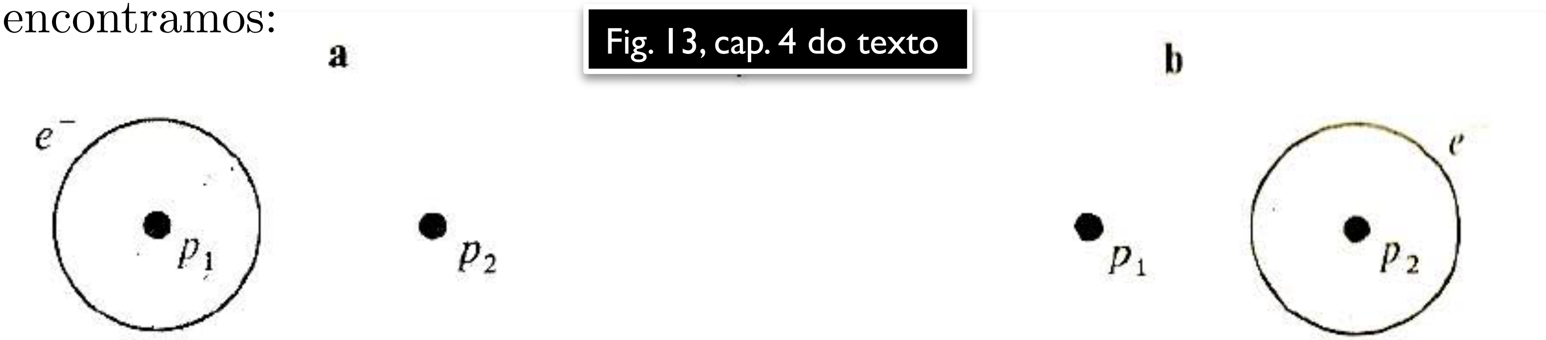
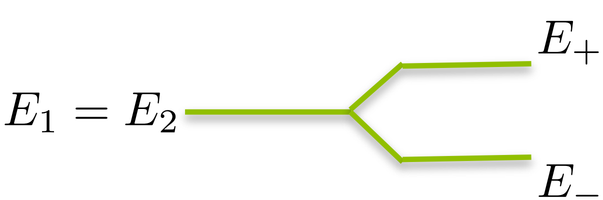


Fig. 13, cap. 4 do texto

$$E_1 = E_2 = E_m$$

As soluções aproximadas, que fixam elétrons nos prótons, conforme a figura, fornecem novamente: $\langle\varphi_1|H|\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2|H|\varphi_2\rangle = E_m$, mas $\langle\varphi_1|H|\varphi_2\rangle \neq 0$. A solução correta delocaliza o elétron e é obtida por uma combinação de $|\varphi_1\rangle$ com $|\varphi_2\rangle$.



$$E_- < E_1 = E_2$$

Sistema de dois níveis

- **Aspecto dinâmico.** O que acontece com o sistema que se encontra em $|\psi(0)\rangle$, após ligar W? Se, inicialmente, o sistema estivesse em $|\varphi_1\rangle$, um autoestado de H_0, qual a chance de encontrá-lo em $|\varphi_2\rangle$, outro autoestado de H_0?

  É importante distinguir duas situações: W não depende do tempo e W depende do tempo. Enquanto que para $W(t) = W$, a base de estados estacionários não muda com o tempo, para $W(t)$ a base poderia mudar a cada instante, pois seria possível ter situações onde $[W(t), W(t')] \neq 0$.

- Caso I: perturbação W não depende do tempo.
  Para $W(t) = W$, basta escrever o estado inicial na base de autoestados de H e multiplicá-los pelas fases apropriadas. Para $|\psi(0)\rangle = a_+(0)|\psi_+\rangle + a_-(0)|\psi_-\rangle$, isso daria

$$|\psi(t)\rangle = a_+(0)e^{-iE_+t/\hbar}|\psi_+\rangle + a_-(0)e^{-iE_-t/\hbar}|\psi_-\rangle$$

Para achar $a_+(0)$ e $a_-(0)$, impomos a condição inicial $|\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$. Para isso basta fazer uso do operador $\mathbb{1}$ da base de estados estacionários de H.

$|\psi(0)\rangle = a_+(0)|\psi_+\rangle + a_-(0)|\psi_-\rangle = \mathbb{1}|\varphi_1\rangle = |\psi_+\rangle\langle\psi_+|\varphi_1\rangle + |\psi_-\rangle\langle\psi_-|\varphi_1\rangle$,

ou seja: $\quad a_+(0) = \langle\psi_+|\varphi_1\rangle$ e $\quad a_-(0) = \langle\psi_-|\varphi_1\rangle$

Sistema de dois níveis

- As soluções de $H|\psi_\pm\rangle = E_\pm|\psi_\pm\rangle$ foram apresentadas no slide 3 e são descritas por $\begin{cases}|\psi_+\rangle = +\cos\theta/2e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + \sin\theta/2e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle \rightarrow \langle\psi_+|\varphi_1\rangle = \cos\theta/2e^{+i\varphi/2}\\ |\psi_-\rangle = -\sin\theta/2e^{-i\varphi/2}|\varphi_1\rangle + \cos\theta/2e^{+i\varphi/2}|\varphi_2\rangle \rightarrow \langle\psi_-|\varphi_1\rangle = -\sin\theta/2e^{+i\varphi/2}\end{cases}$

  onde θ e φ são definidos por $\begin{cases}\tan\theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1-E_2}\\ W_{21} = |W_{21}|e^{i\varphi}\end{cases} \Rightarrow W_{12}=0 \begin{cases}|\psi_+\rangle = |\varphi_1\rangle\\ |\psi_-\rangle = |\varphi_2\rangle\end{cases}$

  Com isso temos $|\psi(0)\rangle = \cos\theta/2e^{+i\varphi/2}|\psi_+\rangle - \sin\theta/2e^{+i\varphi/2}|\psi_-\rangle$ e $\therefore$ $|\psi(t)\rangle$ fica dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{+i\varphi/2}\Big[\cos\theta/2e^{-iE_+t\hbar/2}|\psi_+\rangle - \sin\theta/2e^{-iE_-t/\hbar}|\psi_-\rangle\Big].$$

- Quanto vale a probabilidade de achar o sistema em $|\varphi_2\rangle$? Sabemos a resposta. Basta calcular $\mathcal{P}_{12}(t) = |\langle\varphi_2|\psi(t)\rangle|^2$. Comecemos pela amplitude

$$\langle\varphi_2|\psi(t)\rangle = e^{+i\varphi/2}\Big[\cos\theta/2e^{-iE_+t\hbar/2}\langle\varphi_2|\psi_+\rangle - \sin\theta/2e^{-iE_-t/\hbar}\langle\varphi_2|\psi_-\rangle\Big]$$

  Em seguida, use que $\begin{cases}\langle\varphi_2|\psi_+\rangle = +\sin\theta/2e^{+i\varphi/2}\\ \langle\varphi_2|\psi_-\rangle = +\cos\theta/2e^{+i\varphi/2}\end{cases}$ e obtenha

$$\langle\varphi_2|\psi(t)\rangle = e^{i\varphi}\sin\theta/2\cos\theta/2[e^{-iE_+t\hbar/2} - e^{-iE_-t\hbar/2}] = e^{i\varphi}\frac{\sin\theta}{2}[e^{-iE_+t\hbar/2} - e^{-iE_-t\hbar/2}]$$

Sistema de dois níveis

- A probabilidade de transição de $|\varphi_1\rangle$ no instante 0 para $|\varphi_2\rangle$ no instante t fica

$$\mathcal{P}_{12}(t) = |\langle\varphi_2|\psi(t)\rangle|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{\sin\theta}{2}[e^{-iE_+t/\hbar} - e^{-iE_-t/\hbar}]\right|^2 = \frac{\sin^2\theta}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{E_+ - E_-}{\hbar}t\right)\right]$$

Mas como $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ podemos escrever $\frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\alpha/2$

Isso permite escrever $\mathcal{P}_{12}(t) = \sin^2\theta\sin^2\left(\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}t\right)$ que com $\tan\theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1 - E_2}$

fica $\mathcal{P}_{12}(t) = \frac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}\sin^2\left(\frac{E_+ - E_-}{2\hbar}t\right)$ que fazendo uso do slide 4,

fica $$\boxed{\mathcal{P}_{12}(t) = \frac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}\sin^2\left[\frac{\sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|W_{12}|^2}}{2\hbar}t\right]}$$

O período de oscilação desta probabilidade é obtido percebendo que $\sin^2\omega t$ repete valor a cada π, isto é $\sin^2\omega(t+T) = \sin^2(\omega t)$, se $\omega T = \pi$. Assim,

o período de repetição é obtido pela relação $\left[\frac{\sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|W_{12}|^2}}{2\hbar}T\right] = \pi$

e a freqüência de repetição é $\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|W_{12}|^2}}{2\pi\hbar} = \frac{E_+ - E_-}{h}$

freqüência de Bohr

Sistema de dois níveis

- A probabilidade máxima é modulada por $\sin^2\theta = \dfrac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}$ e

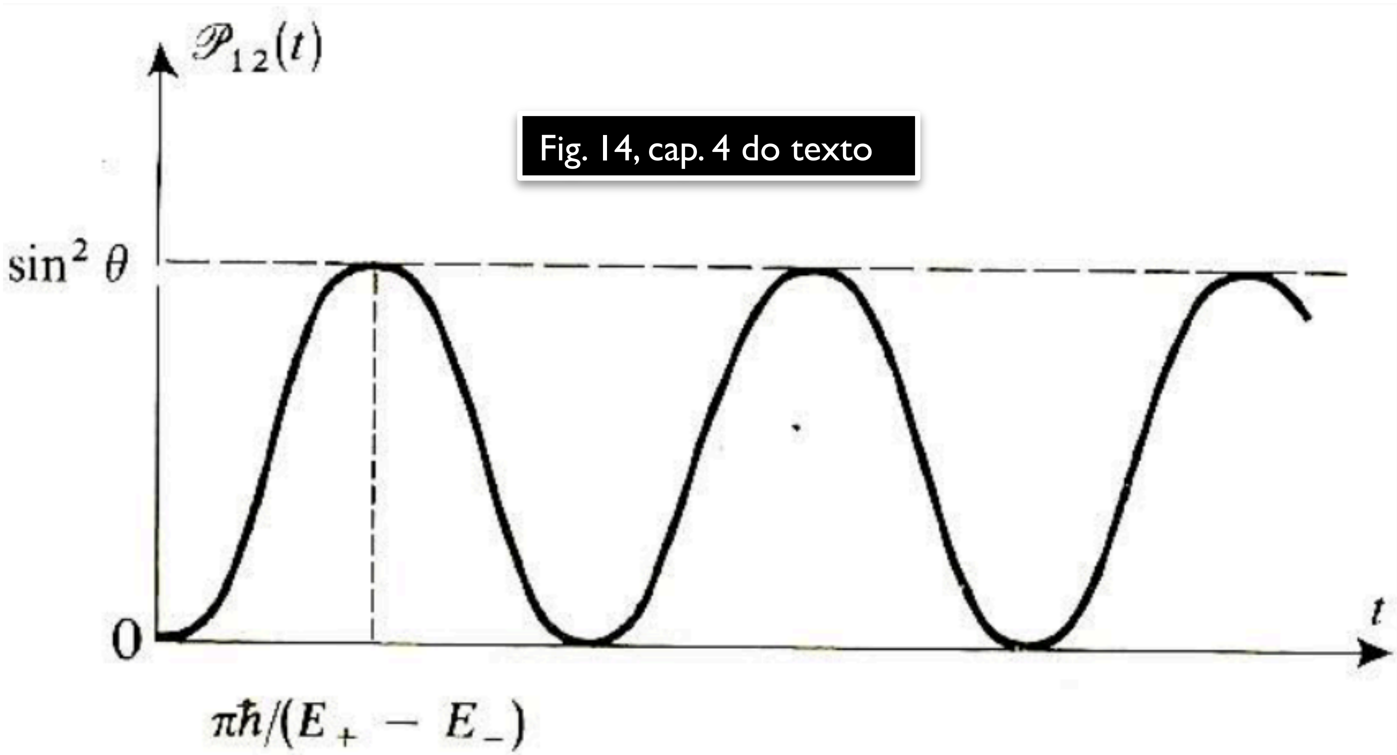


Fig. 14, cap. 4 do texto

é atingida após metade do período, $\dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi\hbar}{\sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|W_{12}|^2}} = \dfrac{h}{2(E_+ - E_-)}$

- 100% de chance de encontrar o sistema em $|\varphi_2\rangle$ só ocorre quando $|W_{12}| >> |E_1 - E_2|$ ou no caso degenerado $E_1 = E_2$.
- A cada período, o sistema volta a ter 100% de chance de ser encontrado em $|\varphi_1\rangle$.

Sistema de dois níveis

- Caso II: perturbação W pode ou não depender do tempo (detalhes em F789). Queremos calcular $|\psi(t)\rangle$, sabendo que no instante $t=0$ o sistema estava em $|\psi(0)\rangle$. Vamos supor que no instante $t=0$ a perturbação $W(0)$ foi ligada e ela pode ou não mudar com o tempo. Consideraremos o caso geral $W(t)$. É sempre possível escrever $|\psi(t)\rangle$ na base de autokets de H_0 (ela é completa). Como a base não depende do tempo (estamos supondo que $H_0(t)=H_0$) apenas os coeficientes da expansão dependerão do tempo, isto é, de um modo geral o ket, em qualquer instante, pode ser escrito por:

$$|\psi(t)\rangle = \mathbb{1}|\psi(t)\rangle = |\varphi_1\rangle \underbrace{\langle\varphi_1|\psi(t)\rangle}_{a_1(t)\ (a_1(0)=1)} + |\varphi_2\rangle \underbrace{\langle\varphi_2|\psi(t)\rangle}_{a_2(t)\ (a_2(0)=0)} = a_1(t)|\varphi_1\rangle + a_2(t)|\varphi_2\rangle$$

condição de contorno

O futuro é comandado pela equação de Schrödinger $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$

Substituição direta da expressão acima nesta equação fornece:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\{a_1(t)|\varphi_1\rangle + a_2(t)|\varphi_2\rangle\} = (H_0+W)\{a_1(t)|\varphi_1\rangle + a_2(t)|\varphi_2\rangle\}$$

A equação pode dividida em duas equações acopladas em primeira ordem no tempo, se projetarmos em

$$\boxed{\begin{cases}\langle\varphi_1| \rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}a_1(t) = E_1 a_1(t) + W_{12}(t)a_2(t)\\ \langle\varphi_2| \rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}a_2(t) = E_2 a_2(t) + W_{21}(t)a_1(t)\end{cases}}$$

existem estratégias para resolver isso