Revisão: Potencial central

Para estudar o problema de espalhamento de uma partícula por um potencial central, é natural utilizar as observáveis (CCOC) que comutam, H, L^2 e L_z

$$\text{com } H=H_0+V \begin{cases} H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow \text{é a Hamiltoniana da partícula livre} \\ \\ V=V(R) \rightarrow \text{é o potencial espalhador esfericamente simétrico.} \end{cases}$$

Vimos em F689 que, na representação das coordenadas, a equação de Schrödinger,

$$\text{que é dada por: } \begin{cases} H\psi(\vec{r})=\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+V(r)\right]\psi(r)=E\psi(\vec{r}), \\ \text{com} \\ \Delta=\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right), \end{cases}$$

pôde ser transformada na equação

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{1}{2\mu r^2}L^2+V(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi)=E\psi(r,\theta,\varphi),$$

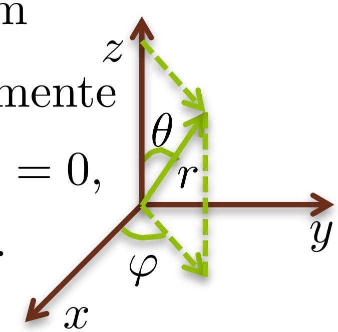
onde usamos a forma do operador L^2 na representação das coordenadas (F689),

$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$, que tem toda a dependência angular,

para escrever

$$H=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{1}{2\mu r^2}L^2+V(r).$$

Revisão: separação de variáveis na representação das coordenadas



- Esta Hamiltoniana H comuta com L^2 e L_z, pois ambos comutam com L^2 e com operadores funções de $R \rightarrow$ lembre que $\vec{L}$ atua somente nas coordenadas θ e φ. Isso forneceu $[H,L^2]=[H,L_z]=[L^2,L_z]=0$, e sugeriu que $\psi(\vec{r})$ seja autofunção simultânea das 3 observáveis.

- Ou seja, estamos procurando $\begin{cases} H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \\ L^2\psi(\vec{r}) = \ell(\ell+1)\hbar^2\psi(\vec{r}) \\ L_z\psi(\vec{r}) = m\hbar\psi(\vec{r}) \end{cases}$

  o que sugeriu $\psi(\vec{r}) = R(r)Y_\ell^m(\theta\varphi)$, pois, como vimos, a harmônica esférica é solução das equações definidas por L^2 e L_z $\begin{cases} L^2Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\hbar^2Y_\ell^m(\theta,\varphi) \\ \\ L_zY_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi) \end{cases}$

- Inserção da forma de $\psi(\vec{r})$ em $H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$ levou à

  $\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{2\mu r^2}L^2 + V(r)\Big]R(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi) = ER(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ que pôde ser dividida por $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ e forneceu uma equação para $R(r) = R_{k,\ell}(r)$, isto é:

Indexação esperada para o caso ligado

$$\boxed{\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\Big]R_{k,\ell}(r) = E_{k,\ell}R_{k,\ell}(r)}$$

Revisão: separação de variáveis na representação das coordenadas

- Resolver a equação radial $H_\ell R_{k,\ell}(r) = E_{k,\ell} R_{k,\ell}(r)$ é resolver $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$
- Para um dado par (k,ℓ), resolveremos a equação radial e construiremos o subespaço $\mathcal{E}(k,\ell)$. Note que a equação depende de ℓ mas não depende de m. A solução serve para todos os $2\ell+1$ estados de $\mathcal{E}(k,\ell)$ associados à cada ℓ.
- Chamando de $E_{k,\ell}$, o autovalor associado à um vetor de $\mathcal{E}(k,\ell)$, a equação que precisamos resolver fica:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\right] R_{k,\ell}(r) = E_{k,\ell} R_{k,\ell}(r)$$

Em F689, aprendemos que $\lim_{r\to 0} R_{k,\ell}(r) \sim C r^\ell$.

- Para simplificar chame $R_{k,\ell}(r) = \frac{1}{r} u_{k,\ell}(r)$ e multiplique tudo por r para obter:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\right] u_{k,\ell}(r) = E_{k,\ell} u_{k,\ell}(r),$$

Como $\lim_{r\to 0} R_{k,\ell}(r) \sim C r^\ell \Rightarrow u_{k,\ell}(r) = r R_{k,\ell}(r)$ e $\therefore \lim_{r\to 0} u_{k,\ell}(r) \sim C r^{\ell+1} = 0$

uma equação de Schrödinger em uma dimensão para o potencial efetivo

$$V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \text{ e condição de contorno } u_{k,\ell}(0) = 0$$

Estados de espalhamento ou estados do contínuo de H

- No semestre passado procuramos por estados ligados de $H_\ell R_{k,\ell}(r) = E_{k,\ell} R_{k,\ell}(r)$

  Agora queremos estados do contínuo com a energia conhecida, $E_{k,\ell} = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$.

- Para estados ligados a energia é incógnita e precisa ser calculada para um determinado potencial. Para o caso do contínuo (espalhamento), a energia é "input" (conhecida) do problema (a partícula chega com determinada energia).

- O indexamento da energia precisa mudar para

$$E_{k,\ell} = E_k \Rightarrow \Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \Big] R_{k,\ell}(r) = E_k R_{k,\ell}(r)$$

  Isso não muda comportamento na origem $\lim_{r\to 0} R_{k,\ell}(r) \sim C r^\ell$.

- A estratégia anterior pode ser mantida. Tome $R_{k,\ell}(r) = \dfrac{1}{r} u_{k,\ell}(r)$, e obtenha

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \Big] u_{k,\ell}(r) = E_k u_{k,\ell}(r),$$

  uma equação de Schrödinger em uma dimensão para o potencial efetivo

$$V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \text{ e condição de contorno } u_{k,\ell}(0) = 0$$

- Como é o comportamento assimptótico de $u_{k,\ell}(r)$ para $E_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$?

Partícula Livre

Se o potencial for de curto alcance, cair mais rapidamente que $1/r$ para r grande, nossa equação $\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V(r)\right]u_{k,\ell}(r)=E_k u_{k,\ell}(r)$

fica $-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}u_{k,\ell}(r)=\frac{\hbar^2k^2}{2\mu}u_{k,\ell}(r) \Rightarrow u_{k,\ell}(r)=\begin{cases} e^{+ikr} \\ e^{-ikr}\end{cases} \Rightarrow R_{k,\ell}(r)=\begin{cases}\frac{e^{+ikr}}{r} \\ \frac{e^{-ikr}}{r}\end{cases}$

Note que isso é verdade para qualquer tipo de potencial de curto alcance, inclusive, a partícula livre, isso é $V(r)=0$. Na disciplina de Física-matemática, aprendemos que existem duas soluções da partícula livre $\begin{cases} j_\ell(kr) \to \text{Bessel} \\ \eta_\ell(kr) \to \text{Neumann}\end{cases}$

- Para $kR << 1$, $R_{k,\ell}(r)=\begin{cases} j_\ell(kr)=\frac{(kr)^\ell}{(2\ell+1)!!} \to \text{bem comportada na origem} \\ \\ \eta_\ell(kr)=-\frac{(2\ell-1)!!}{(kr)^{\ell+1}} \to \text{mal comportada na origem}\end{cases}$
- Para $kR >> 1$, $R_{k,\ell}(r)=\begin{cases} j_\ell(kr)\approx\frac{1}{kr}\sin(kr-\ell\frac{\pi}{2}) \\ \\ \eta_\ell(kr)\approx\frac{1}{kr}\cos(kr-\ell\frac{\pi}{2})\end{cases} \Rightarrow \text{misturas de} \begin{cases}\frac{e^{+ikr}}{r} \\ \frac{e^{-ikr}}{r}\end{cases}$
- Para a partícula livre, somente $j_\ell(kr)$ é aceitável. Se o potencial for diferente de zero, $R_{k,\ell}(r)$ pode ser uma mistura de $j_\ell(kr)$ e $\eta_\ell(kr)$ (ou seja, de $e^{\pm ikr}/r$) na região $r\to\infty$ (longe do potencial).

Partícula Livre

Considere um ângulo sólido $d\Omega_0$, ao redor de (θ_0, φ_0). Qual seria a probabilidade encontrar a partícula entre r e $r+dr$, sabendo que ela está numa onda parcial livre, $kj_\ell(kr)Y_\ell^m(\theta_0,\varphi_0)$? Que tal: $k^2r^2j_\ell^2(kr)|Y_\ell^m(\theta_0,\varphi_0)|^2 dr d\Omega_0$?

A figura abaixo, mostra a forma da função $\rho^2 j_\ell^2(\rho)$ para $\ell = 4$ e $\rho = kr$.

- É visível que essa probabilidade é pequena para $\rho < \sqrt{\ell(\ell+1)}$.

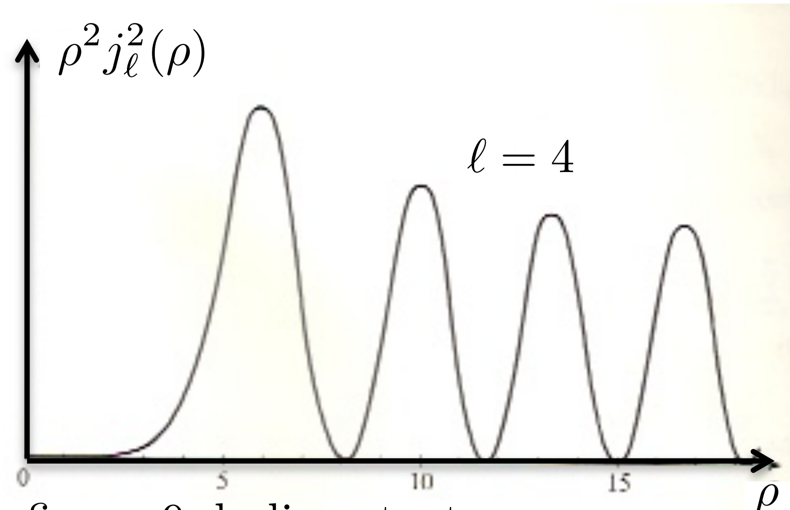


figura 9 do livro texto

Consideraremos que a probabilidade é praticamente zero para $r < \dfrac{1}{k}\sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Esse resultado é bastante importante, pois diz que uma partícula livre "viajando" em $kj_\ell(kr)Y_\ell^m(\theta_0,\varphi_0)$, praticamente não percebe o que ocorrem em uma esfera de raio $b_\ell(k) = \dfrac{1}{k}\sqrt{\ell(\ell+1)}$. Se o potencial tiver uma alcance menor que $b_\ell(k)$, ele não espalha essa partícula!

Pacotes de ondas parciais

Se construíssemos pacotes de onda na região assimptótica, eles seriam misturas do tipo $\int d^3k\ g(k)\frac{e^{+ikr}}{r}e^{-iE_kt/\hbar}$ com $\int d^3k\ g(k)\frac{e^{-ikr}}{r}e^{-iE_kt/\hbar}$. O primeiro só sobrevive para $t>0$ (na região assimptótica, após a partícula sair da região do potencial) e o segundo para $t<0$ (na região assimptótica, antes da partícula entrar na região do potencial).

Vimos na aula 2 que $\lim_{r\to\infty}\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(e^{ik.z}+\frac{e^{ikr}}{r}f_k(\theta,\varphi)\right)$

Da disciplina de física-matemática, temos $\boxed{e^{ikz}=\sum_\ell(2\ell+1)i^\ell j_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta)}$

Como $\lim_{r\to\infty}j_\ell(kr)=\frac{e^{+i(kr-\ell\pi/2)}-e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{2ikr}=\underbrace{e^{-i\ell\pi/2}}_{i^{-\ell}}\left(\frac{e^{+ikr}-e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}\right)$

podemos escrever $\lim_{r\to\infty}e^{ikz}=\sum_\ell(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{e^{+ikr}-e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}\right)$

e concluir: $\left\{\right.$ *Só a onda esférica emergente é afetada pelo potencial. Lembre que a amplitude que multiplica essa onda é uma integral envolvendo o potencial. Veremos que o efeito é apenas uma fase* δ_ℓ.

Estados da partícula livre: ondas planas versus ondas esféricas

- A Hamiltoniana do sistema de uma partícula livre é dada por: $H_0 = \dfrac{\mathbf{P}^2}{2\mu}$ que em suas dimensões cartesianas fica $H_0 = \dfrac{{P_x}^2}{2\mu} + \dfrac{{P_y}^2}{2\mu} + \dfrac{{P_z}^2}{2\mu}$. Para definir uma base, escolha $|k'_x\rangle \rightarrow P_x|k'_x\rangle = \hbar k'_x|k'_x\rangle$ e construa $|\mathbf{k}'\rangle = |k'_x\rangle \otimes |k'_y\rangle \otimes |k'_z\rangle$ de tal forma que $H_0|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{\hbar^2({k'_x}^2 + {k'_y}^2 + {k'_z}^2)}{2\mu}|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{\hbar^2\mathbf{k}'^2}{2\mu}|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{\mathbf{p}'^2}{2\mu}|\mathbf{k}'\rangle$.
Na representação das coordenadas, temos $\langle\mathbf{x}'|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{e^{i\mathbf{k}'.\mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}}$. Para obter isso, percebemos que $[H_0, \mathbf{P}] = 0$ e usamos uma base de autokets de $\mathbf{P} \rightarrow |\mathbf{k}'\rangle$ com $\langle\mathbf{k}'|\mathbf{k}''\rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')$. Se quiser, use $|\mathbf{p}'\rangle = \hbar^{-\mathbf{3/2}}|\mathbf{k}'\rangle$ e $\langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}'\rangle = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\mathbf{p}'.\mathbf{x}'/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$.

- Acontece que $[H_0, \mathbf{L}^2] = [H_0, L_z] = 0$ e poderíamos procurar por uma base

$$\{|k,\ell,m\rangle\} \text{ tal que } \begin{cases} H_0|k,\ell,m\rangle = E|k,\ell,m\rangle \rightarrow E = \hbar^2k^2/2\mu \\ \mathbf{L}^2|k,\ell,m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2|k,\ell,m\rangle \\ L_z|k,\ell,m\rangle = m\hbar|k,\ell,m\rangle \\ \langle k',\ell',m'|k,\ell,m\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta(k-k') \end{cases} \Rightarrow \text{no livro texto}$$

$$\langle\mathbf{r}|k,\ell,m\rangle = \langle\mathbf{r}|\varphi^{(0)}_{k,\ell,m}\rangle = \varphi^{(0)}_{k,\ell,m}(r,\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}}\, j_\ell(kr)Y^m_\ell(\theta,\varphi)$$

Estados da partícula livre: ondas planas versus ondas esféricas

- Os dois conjuntos formam uma base

$$\mathbb{1} = \int d^3k |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}| = \int_0^\infty dk \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} |\varphi^{(0)}_{k,\ell,m}\rangle\langle\varphi^{(0)}_{k,\ell,m}|$$ e são ortonormais no sentido amplo, isto é $\langle\mathbf{k}'|\mathbf{k}''\rangle = \delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')$ e $\langle\varphi^{(0)}_{k,\ell,m}|\varphi^{(0)}_{k',\ell',m'}\rangle =$

$$= \frac{2}{\pi} kk' \int_0^\infty j_\ell(kr) j_{\ell'}(k'r) r^2 dr \int d\Omega\; Y_\ell^{m^\star}(\theta,\varphi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi) = \delta(k-k')\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}.$$

- *Verifique a seguinte relação* $\boxed{\langle\mathbf{k}'|\varphi^{(0)}_{k,\ell,m}\rangle = \frac{(-i)^\ell}{k'} Y_\ell^m(\theta_{\mathbf{k}'},\varphi_{\mathbf{k}'})\delta(k-k')}$

- A relação entre as bases é obtida com ajuda do operador unidade

$$|\mathbf{k}\rangle = |0,0,k\rangle = \mathbb{1}|0,0,k\rangle = \int_0^\infty dk' \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} |\varphi^{(0)}_{k',\ell,m}\rangle\langle\varphi^{(0)}_{k',\ell,m}|0,0,k\rangle$$

Como $|\varphi^{(0)}_{k',\ell,m}\rangle$ e $|0,0,k\rangle$ são autoestados de H_0, vale $\langle\varphi^{(0)}_{k',\ell,m}|0,0,k\rangle \propto \delta(k-k')$

Como $|\varphi^{(0)}_{k',\ell,m}\rangle$ e $|0,0,k\rangle$ são autoestados de L_z, vale $\langle\varphi^{(0)}_{k',\ell,m}|0,0,k\rangle \propto \delta_{m,0}$

- Conclui-se que $|0,0,k\rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k,\ell}|\varphi^{(0)}_{k,\ell,0}\rangle$ conforme já sugerido no slide 7.

verifique $c_{k,\ell}$

Mostre que $|0,0,k\rangle$ *é autoestado de* L_z *com autovalor* $0\hbar$ *e que a expressão acima é a mesma do slide 7 (leia complemento* A_{VIII}*).*

Ondas parciais e deslocamentos de fase

O método de ondas parciais para o problema de espalhamento.

Considere o potencial esfericamente simétrico, $V(\mathbf{r}) = V(r) \Rightarrow \begin{cases} [V, L^2] = 0 \\ [V, L_z] = 0 \end{cases}$

O operador de transição T definido anteriormente (slide 13 da aula 3) por:

$$T = V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon}V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon}V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon}V + \ldots$$

também comuta com $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L} \rightarrow$ lembre que $H_0 = \dfrac{P^2}{2\mu}$, único operador que compõem os denominadores, (e qualquer função deles) comuta com $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}$

$$\boxed{\langle k, \ell' m' | T | k, \ell m \rangle = \langle \ell' m' | \ell m \rangle \langle k(\ell) | T | k(\ell) \rangle = T_\ell(k) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}}$$

Isso traz uma **mensagem importante:**

O potencial esfericamente simétrico não consegue alterar ℓ e m *no processo de espalhamento.*

Ondas parciais e deslocamentos de fase

A amplitude de espalhamento $f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -4\pi^2\dfrac{m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle$ pode ser escrita por:

|k'|=|k|

$$-4\pi^2\frac{m}{\hbar^2}\sum_{\ell m}\sum_{\ell' m'}\int dk'''\int dk''''\langle\mathbf{k}'|k''',\ell',m'\rangle\langle k''',\ell',m'|T|k'''',\ell,m\rangle\langle k'''',\ell,m|\mathbf{k}\rangle$$

Usando $\begin{cases}\text{slide 9} \rightarrow \langle\mathbf{k}'|k''',\ell,m\rangle = (-i)^\ell\frac{1}{k'}\delta(k'-k''')Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}') \\ \text{slide 10} \rightarrow \langle k''',\ell'm'|T|k''',\ell m\rangle = T_\ell(k''')\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\end{cases}$ $\Longrightarrow$ obtemos:

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -4\pi^2\frac{m}{\hbar^2}\frac{1}{k^2}\sum_{\ell m}T_\ell(k)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}')Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}})$$

ou melhor: $\boxed{f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -4\pi^2\sum_{\ell m}\frac{mT_\ell(k)}{\hbar^2k^2}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}')Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}})}$ $\rightarrow$ verifique unidades.

Para obter a dependência angular da amplitude de espalhamento, vamos escolher $\hat{\mathbf{k}}$ na direção $\hat{\mathbf{z}}$ (direção do feixe incidente no referencial do laboratório). Nestas condições $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = Y_\ell^m(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m0}$ mostre

Ondas parciais e deslocamentos de fase

A amplitude de espalhamento fica

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -4\pi^2 \sum_\ell \frac{mT_\ell(k)}{\hbar^2 k^2} Y_\ell^0(\hat{\mathbf{k}}')\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}, \text{ onde } (mostre)$$

$Y_\ell^0(\hat{\mathbf{k}}') = \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta)$. Definindo, $f_\ell(k) = -\pi \dfrac{mT_\ell(k)}{\hbar^2 k^2}$, temos

$$\boxed{f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_\ell(k) P_\ell(\cos\theta)}$$

Para entender o significado físico de $f_\ell(k)$, vamos estudar o comportamento à longas distâncias de $\langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$, isto é:

$$\boxed{\lim_{r\to\infty} \langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{ik.z} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \right)}$$

Do slide 7, temos $e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta)$ onde já vimos que

$$\lim_{r\to\infty} j_\ell(kr) = \frac{e^{+i(kr-\ell\pi/2)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{2ikr} = \underbrace{e^{-i\ell\pi/2}}_{i^{-\ell}} \left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr} \right)$$

assim $\boxed{\lim_{r\to\infty} e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr} \right)}$

Ondas parciais e deslocamentos de fase

Colocando os resultados das caixa verdes na caixa azul do slide anterior, temos:

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{e^{+ikr}-e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}+\frac{e^{ikr}}{r}f_\ell(k)\right)$$

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)\frac{P_\ell(\cos\theta)}{2ik}\left(\underbrace{[1+2ikf_\ell(k)]}\frac{e^{+ikr}}{r}-\frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r}\right)$$

o potencial só afeta a onda esférica que sai

O coeficiente da onda esférica emergente $[1+2ikf_\ell(k)]=1, \text{ se } V=0.$

Se construíssemos pacotes, o pacote associado à $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ só existiria p/ $cte \leq t \leq \infty$

e o associado à $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$ só existiria p/ $-\infty \leq t \leq cte'$. Assim, como o $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$

contém a informação completa (antes e depois da colisão), é de se esperar que:

$\oint \mathbf{J}.\mathbf{dS}=0$. As partículas que entram devem sair (se não há ralos e fontes).

Assim, o fluxo associado à $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ deve ser igual ao fluxo associado à $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$. Isso deve valer para cada onda parcial. Para calcular esses fluxos, defina antes

$$\boxed{S_\ell \equiv 1+2ikf_\ell(k) \text{ e aguarde a próxima aula!}}$$