Ondas parciais e deslocamentos de fase – slide da aula 04

A amplitude de espalhamento fica

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -4\pi^2 \sum_\ell \frac{mT_\ell(k)}{\hbar^2 k^2} Y_\ell^0(\hat{\mathbf{k}}')\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}, \text{ onde } (\textit{mostre})$$

$Y_\ell^0(\hat{\mathbf{k}}') = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta)$. Definindo, $f_\ell(k) = -\pi\frac{mT_\ell(k)}{\hbar^2 k^2}$, temos

$$\boxed{f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1) f_\ell(k) P_\ell(\cos\theta)}$$

Para entender o significado físico de $f_\ell(k)$, vamos estudar o comportamento

à longas distâncias de $\langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$, isto é:

$$\boxed{\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(e^{ik.z} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)\right)}$$

Do slide 7, temos $e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta)$ onde já vimos que

$$\lim_{r\to\infty} j_\ell(kr) = \frac{e^{+i(kr-\ell\pi/2)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{2ikr} = \underbrace{e^{-i\ell\pi/2}}_{i^{-\ell}}\left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}\right)$$

assim $\boxed{\lim_{r\to\infty} e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}\right)}$

Ondas parciais e deslocamentos de fase – slide da aula 04

Colocando os resultados das caixa verdes na caixa azul do slide anterior, temos:

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{e^{+ikr}-e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}+\frac{e^{ikr}}{r}f_\ell(k)\right)$$

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{r}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)\frac{P_\ell(\cos\theta)}{2ik}\left(\underbrace{[1+2ikf_\ell(k)]}\frac{e^{+ikr}}{r}-\frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r}\right)$$

o potencial só afeta a onda esférica que sai

O coeficiente da onda esférica emergente $[1+2ikf_\ell(k)]=1,$ se $V=0.$

Se construíssemos pacotes, o pacote associado à $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ só existiria p/ $cte \le t \le \infty$ e o associado à $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$ só existiria p/ $-\infty \le t \le cte'$. Assim, como o $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ contém a informação completa (antes e depois da colisão), é de se esperar que:

$\oint \mathbf{J}.\mathbf{dS}=0.$ As partículas que entram devem sair (se não há ralos e fontes).

Assim, o fluxo associado à $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ deve ser igual ao fluxo associado à $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$. Isso deve valer para cada onda parcial. Para calcular esses fluxos, defina antes

$$\boxed{S_\ell \equiv 1+2ikf_\ell(k) \Rightarrow \text{ a aula 4 terminou aqui.}}$$

Ondas parciais e deslocamentos de fase

Assim, a partir de $\mathbf{J} = \dfrac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^* \boldsymbol{\nabla}\psi)$ podemos escrever

$$\left| \int r^2 d\Omega \mathrm{Im}\left(S_\ell^* \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} S_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right| = \left| \int r^2 d\Omega \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r} \right) \right|$$

$$4\pi |S_\ell|^2 = 4\pi \Longrightarrow |S_\ell| = 1 \text{ (fruto da conservação de fluxo).}$$

Se $|S_\ell| = 1$, é sugestiva a seguinte definição: $S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ $\begin{cases} \delta_\ell \equiv \begin{cases} \text{deslocamento} \\ \text{de fase} \end{cases} \\ \delta_\ell \to \text{número real} \\ \text{o 2 é convenção} \end{cases}$

O que deixa claro que a existência do potencial pode no máximo infligir uma mudança de fase na onda esférica emergente. Como $S_\ell \equiv 1 + 2ikf_\ell(k)$,

podemos escrever $f_\ell = \dfrac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} = \underbrace{\dfrac{e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell}{k}} = \dfrac{\sin\delta_\ell}{ke^{-i\delta_\ell}} = \dfrac{\sin\delta_\ell}{k(\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell)}$

Ou ainda $\underbrace{f_\ell = \dfrac{1}{k(\cot\delta_\ell - i)}}_{\text{está forma será útil}}$. Assim, $f(\theta) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)$

Note que para deduzir isso, usamos apenas que $[\mathbf{L}^2, T] = [L_z, T] = 0$ *e conservação de probabilidade.*

O método de ondas parciais para o problema de espalhamento

A amplitude de espalhamento depende dos deslocamentos de fase na forma:

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta).$$

Para obter a seção de choque diferencial basta calcular $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$. Vamos calcular a seção de choque integral, também chamada de seção de choque total, se espalhamento de potenciais que não carregam a estrutura interna do alvo. Em geral, se integrarmos apenas nos ângulos, ela chamará *seção de choque integral.* Mas, se integrarmos nos ângulos e somarmos sobre todos os processos possíveis, ela será denominada *seção de choque total.* A seção de choque integral pode ser para um determinado processo, por exemplo, *seção de choque integral elástica*, ou *seção de choque integral da excitação* $X \to A$, *do alvo* Z. No caso presente, de potencial Hermiteano de um corpo só, a seção de choque integral é elástica e igual à total, pois só o processo elástico é permitido. Ela é definida por: $\sigma_{total} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega |f(\theta)|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta |f(\theta)|^2 =$

$$= \frac{2\pi}{k^2}\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\sum_{\ell,\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)e^{i(\delta_\ell-\delta_{\ell'})}\sin\delta_\ell\sin\delta_{\ell'}P_{\ell'}(\cos\theta)P_\ell(\cos\theta).$$

O método de ondas parciais para o problema de espalhamento

Mas, $\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$ *(mostre!)* e assim :

$$\sigma_{total} = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{\ell,\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)e^{i(\delta_\ell-\delta_{\ell'})}\sin\delta_\ell\sin\delta_{\ell'}\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} \text{ e finalmente}$$

$$\boxed{\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell}$$

Como fica o teorema óptico, $\mathrm{Im} f(\theta=0) = \frac{k\sigma_{total}}{4\pi}$? Isso pode ser obtido de

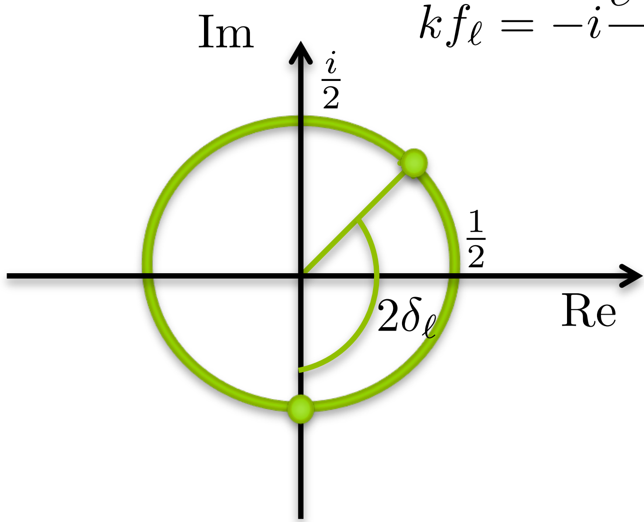
$$\mathrm{Im} f(\theta=0) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\underbrace{\mathrm{Im} e^{i\delta_\ell}}_{\sin\delta_\ell}\sin\delta_\ell\underbrace{P_\ell(\cos(\theta=0))}_{1} = \frac{k}{4\pi}\underbrace{\frac{4\pi}{k^2}\sum_\ell(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell}_{\sigma_{total}}$$

De volta para a relação entre f_ℓ e δ_ℓ. Quando mudamos a energia, δ_ℓ muda, e por conseguinte muda f_ℓ. Note que f_ℓ, entretanto, não muda de qualquer maneira,

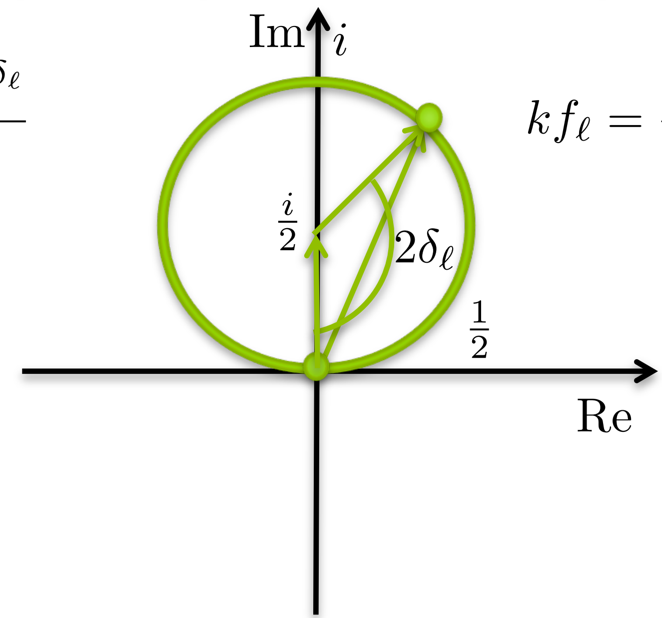
$$f_\ell = \frac{e^{2i\delta_\ell}-1}{2ik} \Longrightarrow kf_\ell = -i\frac{e^{2i\delta_\ell}}{2} + \frac{i}{2}$$

Como fica essa dependência no plano complexo? Próximo slide.

O método de ondas parciais para o problema de espalhamento



$$kf_\ell = -i\frac{e^{2i\delta_\ell}}{2}$$



$$kf_\ell = -i\frac{e^{2i\delta_\ell}}{2} + \frac{i}{2}$$

Comentários

- kf_ℓ precisa cair sobre a circunferência.
- Se $\delta_\ell << 1 \rightarrow kf_\ell$ fica na parte debaixo do círculo da direita e é quase real.
- $|kf_\ell|$ é máximo quando $2\delta_\ell = \pi \;\therefore\; \delta_\ell = \pi/2$. Isso faz sentido, pois, lembre que $\sigma_{total} = \dfrac{4\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$.

Próxima tarefa: determinar os δ_ℓ

Determinação dos deslocamentos de fase

Suponha $V(r) = 0$ se $r > R$ (alcance do potencial). Para $r > R$ a função de onda é combinação de ondas esféricas. De fato, é solução da equação de Schrödinger da partícula livre, cuja forma geral é uma combinação de funções

$$\text{de}\begin{cases}\text{Newman, } \eta_\ell(kr), \text{ que não se comporta bem na origem.}\\ \text{e}\\ \text{Bessell, } j_\ell(kr), \text{ que se comporta bem na origem.}\end{cases}$$

Assim, para $r > R$, onde o potencial é zero, a função de onda deve ser uma combinação de $\eta_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta)$ e $j_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta)$. Ou se quisermos trabalhar

$$\text{com funções de Hankel}\begin{cases}h^{(1)} = j_\ell + i\eta_\ell \Rightarrow \lim_{r\to\infty} h^{(1)} = \dfrac{e^{i(kr-\ell\pi/2)}}{ikr}\\[2ex] h^{(2)} = j_\ell - i\eta_\ell \Rightarrow \lim_{r\to\infty} h^{(2)} = -\dfrac{e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{ikr}\end{cases}$$

A função de onda pode ser escrita como

$$\langle \mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\ell i^\ell(2\ell+1)A_\ell P_\ell(\cos\theta) \text{ para } r > R, \text{ onde}$$

$A_\ell(kr) = c_\ell^{(1)}h_\ell^{(1)}(kr) + c_\ell^{(2)}h_\ell^{(2)}(kr)$. Os coeficientes que multiplicam as funções de Hankel são escolhidos de tal forma que se $V = 0$, $A_\ell(kr)$ fica $j_\ell(kr)$ em todos os pontos.

Determinação dos deslocamentos de fase

Para $r > R$ e R muito grande, vimos que

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)\frac{P_\ell(\cos\theta)}{2ik}\left(S_\ell\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-(ikr-\ell\pi)}}{r}\right)$$

que precisa ser comparado com

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell} i^\ell(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\lim_{r\to\infty}A_\ell(kr) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell} i^\ell(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\lim_{r\to\infty}\left(c_\ell^{(1)}h_\ell^{(1)}(kr) + c_\ell^{(2)}h_\ell^{(2)}(kr)\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell} i^\ell(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left(c_\ell^{(1)}\frac{e^{i(kr-\ell\pi/2)}}{ikr} - c_\ell^{(2)}\frac{e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{ikr}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)\frac{P_\ell(\cos\theta)}{2ik}\left(2c_\ell^{(1)}\frac{e^{ikr}}{r} - 2c_\ell^{(2)}\frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r}\right)$$

(usei que $i^\ell = e^{i\pi\ell/2}$). Comparação direta fornece:

$$c_\ell^{(1)} = \tfrac{1}{2}S_\ell = \tfrac{1}{2}e^{i2\delta_\ell} \qquad \text{e} \qquad c_\ell^{(2)} = \tfrac{1}{2}$$

Devolvendo isso em A_ℓ, temos $A_\ell = \frac{1}{2}e^{i2\delta_\ell}h^{(1)} + \frac{1}{2}h^{(2)}$. *Mostre que*

$$\text{(para } r > R\text{)} \qquad \boxed{A_\ell(kr) = e^{i\delta_\ell}\left(\cos\delta_\ell\; j_\ell(kr) - \sin\delta_\ell\;\eta_\ell(kr)\right)}$$

Determinação dos deslocamentos de fase

A partir de $A_\ell(kr) = e^{i\delta_\ell}\big(\cos\delta_\ell \; j_\ell(kr) - \sin\delta_\ell \; \eta_\ell(kr)\big)$ podemos calcular $\beta_\ell \equiv (\frac{r}{A_\ell}\frac{dA_\ell}{dr})\big|_{r=R} = kR\left(\frac{j'_\ell(kR)\cos\delta_\ell - \eta'_\ell(kR)\sin\delta_\ell}{j_\ell(kR)\cos\delta_\ell - \eta_\ell(kR)\sin\delta_\ell}\right)$

onde j'_ℓ e η'_ℓ são derivadas com respeito a kr. Se aprendermos como obter β_ℓ, podemos inverter esta equação e calcular δ_ℓ. A inversão é relativamente simples. Basta agrupar os coeficientes dos $\sin\delta_\ell$ e $\cos\delta_\ell$.

$\frac{\beta_\ell}{kR}\big(j_\ell(kR)\cos\delta_\ell - \eta_\ell(kR)\sin\delta_\ell\big) = j'_\ell(kR)\cos\delta_\ell - \eta'_\ell(kR)\sin\delta_\ell$ ou ainda

$$(\frac{\beta_\ell}{kR}j_\ell - j'_\ell)\cos\delta_\ell = (\frac{\beta_\ell}{kR}\eta_\ell - \eta'_\ell)\sin\delta_\ell \text{ que fornece:}$$

$$\boxed{\tan\delta_\ell = \frac{kRj'_\ell(kR) - \beta_\ell j_\ell(kR)}{kR\eta'_\ell(kR) - \beta_\ell\eta_\ell(kR)}} \quad \therefore \quad \begin{cases}\text{Se acharmos } \beta_\ell \\ \text{teremos achado } \delta_\ell.\end{cases}$$

Para determinar β_ℓ, precisamos resolver a equação de Schrödinger na região do potencial,

$\frac{d^2u_\ell}{dr^2} + (k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2})u_\ell = 0$ onde $u_\ell = rA_\ell(r)$ e $u_\ell(r)|_{r=0} = 0$

Integre esta equação até $r = R$, calcule $\beta_\ell\Big|_{\substack{\text{solução}\\\text{interna}}}$ e iguale à $\beta_\ell\Big|_{\substack{\text{solução}\\\text{externa}}}$

Note que β_ℓ é um número real. Tendo ele, calcule $\tan\delta_\ell$.

Aplicação: Espalhamento da esfera dura

O problema tridimensional de barreira infinita ou esfera dura é definido pelo

$$\text{potencial } V \begin{cases} \infty \text{ para } r \leq R \\ \\ 0 \text{ para } r > R \end{cases}$$

Como a esfera é impenetrável, a função de onda precisa se anular em $r = R$. Isto já é suficiente para achar δ_ℓ (não é preciso calcular β_ℓ neste caso).

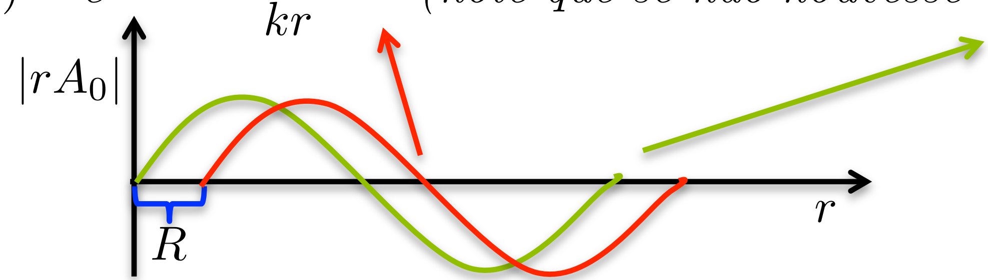
$$A_\ell(kr)\big|_{r=R} = e^{i\delta_\ell}\big(\cos\delta_\ell\; j_\ell(kR) - \sin\delta_\ell\; \eta_\ell(kR)\big) = 0 \Rightarrow \tan\delta_\ell = \frac{j_\ell(kR)}{\eta_\ell(kR)}$$

$$\text{Caso } \ell = 0 \begin{cases} j_0(kR) = \frac{\sin kR}{kR} \\ \\ \eta_0(kR) = -\frac{\cos kR}{kR} \end{cases} \Longrightarrow \tan\delta_0 = -\tan kR \therefore \delta_0 = -kR$$

A parte radial da função de onda varia da seguinte forma:

$$A_0(kr) = e^{i\delta_0}\left(\frac{\cos\delta_0 \sin kr}{kr} + \frac{\sin\delta_0 \cos kr}{kr}\right) = e^{i\delta_0}\frac{\sin(kr+\delta_0)}{kr} \text{ ou}$$

$$A_0(kr) = e^{i\delta_0}\frac{\sin k(r-R)}{kr} \; (\textit{note que se não houvesse } V,\; A_0 = j_0 = \frac{\sin kr}{kr})$$



Aplicação: Espalhamento da esfera dura

Ainda para a esfera dura, estudaremos $\tan\delta_\ell$ para altas $(kR >> 1)$ e baixas $(kR << 1)$ energias.

Baixa energia

$$\text{Para } kR << 1 \begin{cases} j_\ell(kr) = \frac{(kr)^\ell}{(2\ell+1)!!} \\ \\ \eta_\ell(kr) = -\frac{(2\ell-1)!!}{(kr)^{\ell+1}} \end{cases} \Longrightarrow \tan\delta_\ell = -\frac{(kR)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!!(2\ell-1)!!}$$

Para $\ell = 0 \to \tan\delta_0 = -kR \approx \delta_0$ mesmo resultado que antes que era exato.

Note que é justo desprezar os δ_ℓ para $\ell > 0$, pois $\tan\delta_\ell \propto (kr)^{2\ell+1}$.

Se $\delta_0 = -kR \Rightarrow \dfrac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$ com $f(\theta) = \dfrac{1}{k}\sum_\ell (2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)$

Truncando a soma, em $\ell = 0$, temos $f(\theta) \approx \dfrac{1}{k}e^{i\delta_0}\sin\delta_0 \to |f(\theta)|^2 = \dfrac{\sin^2\delta_0}{k^2}$

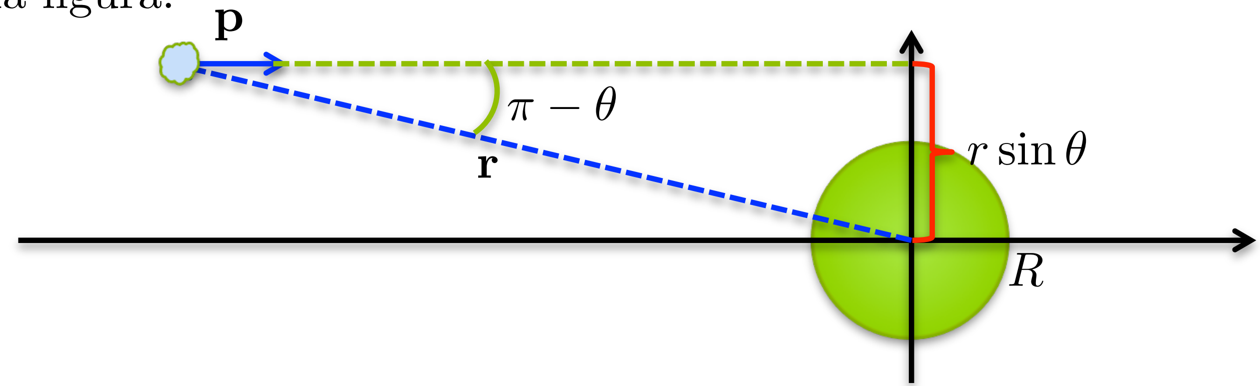
$$\text{E } \therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2R^2}{k^2} = R^2 \Longrightarrow \sigma_{total} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = R^2\int d\Omega = 4\pi R^2$$

A seção de choque é quatro vezes maior que a seção de choque geométrica. Baixa energia, comprimento de onda grande, mecânica quântica difere da mecânica clássica. Será que para altas energias teremos $\sigma_{total} = \pi R^2$*?*

Aplicação: Espalhamento da esfera dura

Alta energia

Para $kR >> 1$ precisamos somar as contribuições de δ_ℓ que diferem de zero. Lembre que soma em ℓ vai até infinito, mas a partir de um dado ℓ, $\delta_\ell \approx 0$ e a soma pode ser truncada. ℓ está associado momento angular. Classicamente $L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = rp \sin\theta$ onde $r \sin\theta$ é o "braço de alavanca", indicado na figura.



Note que classicamente quando $r \sin\theta > R$, a partícula, com momento angular superior a Rp, deixa de colidir com a esfera rígida. Com isso em mente, somaremos em ℓ até $\ell_{max} = kR$. Desta forma, a seção de choque total pode ser escrita por

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell=kR} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

Aplicação: Espalhamento da esfera dura

Considerando $\sin^2\delta_\ell = \dfrac{\tan^2\delta_\ell}{1+\tan^2\delta_\ell}$ e que $\tan\delta_\ell = \dfrac{j_\ell(kR)}{\eta_\ell(kR)}$, temos:

$$\sin^2\delta_\ell = \frac{j_\ell^2(kR)}{j_\ell^2(kR)+\eta_\ell^2(kR)}. \text{ Para } kR >> 1 \begin{cases} j_\ell(kR) = \frac{1}{kR}\sin(kR-\ell\pi/2) \\ \\ \eta_\ell(kR) = -\frac{1}{kR}\cos(kR-\ell\pi/2) \end{cases}$$

e assim $\sin^2\delta_\ell = \dfrac{\sin^2(kR-\ell\pi/2)}{\sin^2(kR-\ell\pi/2)+\cos^2(kR-\ell\pi/2)} = \sin^2(kR-\ell\pi/2)$

Agora basta realizar a soma: $\sigma_{total} = \dfrac{4\pi}{k^2}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\ell=kR}(2\ell+1)\sin^2(kR-\ell\pi/2)$

Para realizar esta soma, considere dois termos consecutivos da série

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\ell=kR}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell, \text{isto é} \begin{cases} \ell \to (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell \\ \qquad\text{e} \\ \ell' = \ell+1 \to (2(\ell+1)+1)\sin^2\delta_{\ell+1} \end{cases}$$

some-os para obter $(2\ell+1)\underbrace{(\sin^2\delta_\ell+\sin^2\delta_{\ell+1})}_{1 \text{ devido ao } \ell\pi/2} + 2\underbrace{\sin^2\delta_{\ell+1}}_{<1}$

Para finalmente obter $\sigma_{total} = \dfrac{4\pi}{k^2}\left(\displaystyle\sum_{\substack{\ell=0 \\ 2 \text{ em } 2}}^{\ell=kR}(2\ell+1) + \sum_{\substack{\ell=0 \\ 2 \text{ em } 2}}^{\ell=kR} 2\sin^2\delta_{\ell+1}\right)$

Aplicação: Espalhamento da esfera dura

Note agora que a primeira soma é de uma progressão aritmética e a segunda é uma soma de números menores do que um

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2}\left(\underbrace{\sum_{\substack{\ell=0 \\ 2 \text{ em } 2}}^{\ell=kR} (2\ell+1)}_{\substack{\text{número de} \\ \text{termos}} \times \substack{\text{valor} \\ \text{médio}}} + 2 \underbrace{\sum_{\substack{\ell=0 \\ 2 \text{ em } 2}}^{\ell=kR} \sin^2\delta_{\ell+1}}_{\text{este vai com } kR} \right)$$

Soma de termos da progressão aritmética é igual à $\dfrac{kR}{2} \times \dfrac{1+2kR+1}{2} \propto \dfrac{(kR)^2}{2}$.

A segunda soma é linear em kR e pode ser desprezada para $kR,$ suficientemente grande. Note que se trocássemos todos os $\sin^2\delta_{\ell+1}$ por 1 a soma seria $kR/2$.

A seção de choque total, é, portanto $\sigma_{total} = \dfrac{4\pi}{k^2}\dfrac{(kR)^2}{2} \approx 2\pi R^2$!! Isso é o dobro da geométrica. Surpreso?

- *Um potencial com uma descontinuidade é sempre quântico!*
- *Mesmo comprimentos de onda minúsculos percebem a descontinuidade.*