Momento Angular na Mecânica Quântica

- O operador momento angular $\mathbf{J}$ satisfaz as relações: $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.
- $J^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle \Rightarrow$ com $j \geq 0$.
- $J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle \Rightarrow$ com $-j \leq m \leq j$.
- $J_- \equiv J_x - iJ_y$ com $J_-|k,j,m\rangle = \begin{cases} 0 \text{ se } m = -j \\ \propto |k,j,m-1\rangle \text{ se } m > -j \end{cases}$

  Para $m > -j$, isso significa que $\begin{cases} J^2 J_-|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_-|k,j,m\rangle \\ \\ J_z J_-|k,j,m\rangle = (m-1)\hbar J_-|k,j,m\rangle \end{cases}$

  ou seja, $J_-|k,j,m\rangle$ é autoket de J^2 e J_z com autovalores $j(j+1)\hbar^2$ e $(m-1)\hbar$, respectivamente.

- $J_+ \equiv J_x + iJ_y$ com $J_+|k,j,m\rangle = \begin{cases} 0 \text{ se } m = j \\ \propto |k,j,m+1\rangle \text{ se } m < j \end{cases}$

  Para $m < j$, isso significa que $\begin{cases} J^2 J_+|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_+|k,j,m\rangle \\ \\ J_z J_+|k,j,m\rangle = (m+1)\hbar J_+|k,j,m\rangle \end{cases}$

  ou seja, $J_+|k,j,m\rangle$ é autoket de J^2 e J_z com autovalores $j(j+1)\hbar^2$ e $(m+1)\hbar$, respectivamente.

Momento Angular na Mecânica Quântica

- Quando $|k,j,m\rangle$ está normalizado, $J_\pm$ gera kets normalizados, se usarmos:

$$\boxed{J_\pm|k,j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}|k,j,m\pm 1\rangle}$$

- Definimos um subespaço $\mathcal{E}(k,j)$ de vetores com o mesmo k e j e diferentes $m's$. O subespaço $\mathcal{E}(k,j)$ tem a dimensão $2j+1$. O espaço $\mathcal{E}$ pode ser considerado como a soma direta dos espaços ortogonais $\mathcal{E}(k,j)$, isto é $\mathcal{E} = \sum_{k,j} \mathcal{E}(k,j)$.

Propriedades de $\mathcal{E}(\mathbf{k},\mathbf{j})$

- $\mathcal{E}(k,j)$ é (2j+1)-dimensional.
- $\mathcal{E}(k,j)$ é globalmente invariante sob ação de $\mathbf{J}^2, J_z$ e $J_\pm$ (de fato $\forall F(\mathbf{J})$, ou seja $\langle k',j',m|F(\mathbf{J})|k,j,m\rangle \propto \delta_{k',k}\delta_{j',j}$.
- Dentro do subespaço $\mathcal{E}(k,j)$, os elementos de matriz $\langle k,j,m'|F(\mathbf{J})|k,j,m\rangle$ não dependem de k. Para entender o significado de k, escolhemos um operador A, tal que $\{A, \mathbf{J}^2, J_z\}$ é im C.C.O.C. Construímos $\{|k,j,m\rangle\}$, como soluções de

$$A|k,j,m\rangle = a_{k,j}|k,j,m\rangle.$$

O índice k distingue os $a_{k,j}$ com o mesmo j.

Somando momentos angulares. Caso geral.

- Como somar momentos angulares na mecânica quântica? Um bom começo: definir o espaço de estados. Que tal: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ onde, k_1 e k_2 são

$$\text{fixos e} \begin{cases} \mathcal{E}_1 \to \sum_{\oplus_{j_1}} \mathcal{E}_1(k_1, j_1) \\ \mathcal{E}_2 \to \sum_{\oplus_{j_2}} \mathcal{E}_1(k_2, j_2) \\ \mathcal{E} \to \begin{cases} \text{união de dois sub-sistemas,} \\ \text{(1) e (2). Por exemplo, duas} \\ \text{partículas. Ou ainda, o} \\ \text{espaço de spin + espaço orbital.} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \oplus_j = \text{soma direta em } j$$

- $\mathcal{E}_1 \begin{cases} \mathbf{J}_1^2|k_1, j_1, m_1\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|k_1, j_1, m_1\rangle \Rightarrow \text{com } j_1 \geq 0. \\ J_{1z}|k_1, j_1, m_1\rangle = m_1\hbar|k_1, j_1, m_1\rangle \Rightarrow \text{com } -j_1 \leq m_1 \leq j_1. \\ J_{1\pm}|k_1, j_1, m_1\rangle = \hbar\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)}|k_1, j_1, m_1 \pm 1\rangle \end{cases}$

- $\mathcal{E}_2 \begin{cases} \mathbf{J}_2^2|k_2, j_2, m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|k_2, j_2, m_2\rangle \Rightarrow \text{com } j_2 \geq 0. \\ J_{2z}|k_2, j_2, m_2\rangle = m_2\hbar|k_2, j_2, m_2\rangle \Rightarrow \text{com } -j_2 \leq m_2 \leq j_2. \\ J_{2\pm}|k_2, j_2, m_2\rangle = \hbar\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)}|k_2, j_2, m_2 \pm 1\rangle \end{cases}$

- $\mathcal{E} = \sum_{\oplus} \mathcal{E}(k_1, k_2; j_1, j_2)$ com $\mathcal{E}(k_1, k_2; j_1, j_2) = \mathcal{E}_1(k_1, j_1) \otimes \mathcal{E}_1(k_2, j_2)$

  Globalmente invariante sob ação de $\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, J_{1z}$ e J_{2z}.

- $\mathcal{E}(k_1, k_2; j_1, j_2) = \{|k_1, k_2; j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\} \equiv \{|k_1, j_1, m_1\rangle \otimes |k_2, j_2, m_2\rangle\}$
- A dimensão de $\mathcal{E}(k_1, k_2; j_1, j_2)$ é $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

Somando momentos angulares. Relações de Comutação.

- Considere $\mathbf{J}=\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$, onde $\mathbf{J}_1$ atua em $\mathcal{E}_1$ e $\mathbf{J}_2$ atua em $\mathcal{E}_2$. Misturas de $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$, inclusive a soma, atuam em $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

$$\text{Sabemos que se} \begin{cases} [J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{1k} \\ [J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{2k} \\ [J_{1i}, J_{2j}] = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2} \\ \mathbf{J} = \mathbf{J_1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{J_2} \\ [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \end{cases}$$

- A escolha do eixo z, permite escrever um base de autokets de $\mathbf{J}^2$ e J_z, onde $J_z = J_{1z} + J_{2z}$.

- É fácil mostrar que (mostre) $\begin{cases} [J_z, \mathbf{J}_1^2] = [J_z, \mathbf{J}_2^2] = 0 \\ [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2] = [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2] = 0 \\ [J_{1z}, J_z] = [J_{2z}, J_z] = 0 \end{cases}$

- Entretanto, $\mathbf{J}^2$ não comuta com J_{1z}, nem com J_{2z}, embora comute com a soma

$$[\mathbf{J}^2, J_z] = [\mathbf{J}^2, J_{1z} + J_{2z}] = 0.$$

- Faremos uso das relações $\begin{cases} \mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2\mathbf{J}_1.\mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} \end{cases}$

$$\text{onde} \begin{cases} J_{1\pm} = J_{1x} \pm iJ_{1y} \\ J_{2\pm} = J_{2x} \pm iJ_{2y} \end{cases} \Longrightarrow J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm} = J_x \pm iJ_y$$

Somando momentos angulares. Caso geral.

- Por construção, $\mathcal{E}(k_1,k_2;j_1,j_2)=\mathcal{E}(k_1,j_1)\otimes\mathcal{E}(k_2;j_2)$, entendido por: $\mathcal{E}(k_1,k_2;j_1,j_2)=\{|k_1,k_2;j_1,j_2;m_1,m_2\rangle\}\equiv\{|k_1,j_1,m_1\rangle\otimes|k_2,j_2,m_2\rangle\}$ é globalmente invariante sob a ação de $\mathbf{J}_1^2,\mathbf{J}_2^2,J_{1z}$ e J_{2z}. Isso ocorre, uma vez que $\mathcal{E}(k_1,j_1)$ é globalmente invariante com respeito à qualquer função de $\mathbf{J}_1$, $\mathcal{E}(k_2,j_2)$ é globalmente invariante com respeito à qualquer função de $\mathbf{J}_2$ e operadores de $\mathcal{E}(k_1,j_1)$ não atuam em $\mathcal{E}(k_2,j_2)$ e vice-versa.
- Dito isso e como $\mathbf{J}_1^2,\mathbf{J}_2^2,\mathbf{J}^2$ e J_z são operadores que podem ser escritos como funções dos operadores $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$, uma vez que $\begin{cases}\mathbf{J}^2=\mathbf{J}_1^2+\mathbf{J}_2^2+2\mathbf{J}_1.\mathbf{J}_2\\ J_z=J_{1z}+J_{2z}\end{cases}$ é correto afirmar que $\mathcal{E}(k_1,k_2;j_1,j_2)$ também é globalmente invariante sob ação de $\mathbf{J}_1^2,\mathbf{J}_2^2,\mathbf{J}^2$ e J_z. Isso permite concluir que esses operadores são, na pior das hipóteses, bloco-diagonais em $\mathcal{E}\equiv\sum_{\oplus_{k_1},\oplus_{k_2},\oplus_{j_1},\oplus_{j_2}}\mathcal{E}(k_1,k_2;j_1,j_2)$.
- Isso é o mesmo que dizer que, para qualquer que seja a função $F(\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2)$, vale: $\langle k_1,k_2;j_1,j_2|F(\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2)|k_1',k_2';j_1',j_2'\rangle\propto\delta_{k_1,k_1'}\delta_{k_2,k_2'}\delta_{j_1,j_1'}\delta_{j_2,j_2'}$.
- O que precisamos fazer é diagonalizar $\mathbf{J}_1^2,\mathbf{J}_2^2,\mathbf{J}^2$ e J_z no sub-espaço (bloco) $\mathcal{E}(k_1,k_2;j_1,j_2)$ e perceber que esses operadores formam um CCOC neste sub-espaço. Será que já são diagonais?

Somando momentos angulares. Caso geral.

- A resposta é sim para $\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2$ e J_z, pois eles comutam com todos os operadores que definiram $\mathcal{E}(k_1, k_2; j_1, j_2)$, mas, não para $\mathbf{J}^2$, pois $[\mathbf{J}^2, J_{1z}] \neq 0$ e $[\mathbf{J}^2, J_{2z}] \neq 0$.
- Estamos atrás dos auto-estados simultâneos de $\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2$ e J_z, sabendo que serão combinações dos $\{|k_1, k_2; j_1, j_2\rangle\}$.
- Na aula passada, obtivemos na força bruta (diagonalizando $\mathbf{J}^2$) o caso de duas partículas com (somente) o grau de liberdade de spin, isto é $j_1 = 1/2$ e $j_2 = 1/2$.
- Como esses resultados não dependem de k_1 e k_2 (ver slide 2), daqui para frente

$$\text{chamaremos} \begin{cases} \mathcal{E}(k_1, k_2; j_1, j_2) \text{ de } \mathcal{E}(j_1, j_2) \\ \\ |k_1, k_2; j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \text{ de } |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \end{cases}$$

  Fizemos coisa semelhante na aula passada no caso das partículas de spin $1/2$.
- Como não sabemos quais valores, $J's$ autovalores associados à $\mathbf{J}^2$, (e se repetem) na construção de $\mathcal{E}(j_1, j_2)$, escrevemos por enquanto que procuramos por $\mathcal{E}(k, J)$ tal que $\mathcal{E}(j_1, j_2) = \sum_{\oplus} \mathcal{E}(k, J) \rightarrow k$ pode ser útil, caso J se repita.
- *Será que os valores de J repetem? Quantos $k's$ são necessários?*
- *Quais valores de J participam dessa soma direta?*

De volta ao caso de duas partículas de spin ½ (aula passada)

- Achamos na aula passada, a representação matricial de $\mathbf{S}^2$ na base $1(\{|\epsilon_1\rangle, \epsilon_2\rangle\})$:

$$\mathbf{S}^2 \doteq \begin{array}{c} \\ \langle ++| \\ \langle +-| \\ \langle -+| \\ \langle --| \end{array} \hbar^2 \begin{array}{c} |++\rangle|+-\rangle|-+\rangle|--\rangle \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ uma matriz bloco-diagonal.}$$

- Diagonalizamos o bloco 2×2.

$$(\mathbf{S}^2)_0 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \text{ para o autovalor } 2\hbar^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \text{ para o autovalor } 0\hbar^2 \end{cases}$$

- Aprendemos, portanto, que $\mathbf{S}^2$ possuia dois autovalores distintos, $0\hbar^2$ e $2\hbar^2$. O primeiro, não-degenerado, e o segundo, 3-degenerado $\begin{cases} |++\rangle \\ |--\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \end{cases}$

E com isso, obtivemos $\begin{cases} |1,+1\rangle = |++\rangle \\ |1,-1\rangle = |--\rangle \\ |1,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |0,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \end{cases}$

Caso de duas partículas de spin ½: comentários (aula passada)

- Para o sistema de duas partículas com spin 1/2, a base 1 (dada pelos kets $\{|\epsilon_1\rangle, \epsilon_2\rangle\}$, autokets de $\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, S_{1z}, S_{2z}$) forma um conjunto completo, isto é descreve qualquer ket e qualquer operador relacionados à parte de spin do sistema. A base 2 (dada pelos kets $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |0,0\rangle\}$ autokets de $\mathbf{S}_1^2$, $\mathbf{S}_2^2, \mathbf{S}^2, S_z$) também forma um conjunto completo neste espaço. Note que o espaço foi definido pela nossa escolha $S_1 = S_2 = 1/2$.
- Reconhecemos que $\{|S, M\rangle\}$, com $S = 0$ e 1 e todos os valores de M possíveis para esses valores de S, é uma base completa, pois ela é feita de quatro kets ortogonais que descrevem todos os vetores da base (completa e de mesma dimensão) $\{|\epsilon_1\rangle, \epsilon_2\rangle\}$,

$$\text{isto é} \begin{cases} |1,+1\rangle = |++\rangle \\ |1,-1\rangle = |--\rangle \\ |1,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |0,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |++\rangle = |1,+1\rangle \\ |--\rangle = |1,-1\rangle \\ |+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,0\rangle) \\ |-+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |0,0\rangle) \end{cases}$$

- Ou seja, a presença de k foi desnecessária, pois $J = 0$ apareceu uma única vez, assim como $J = 1$. Poderíamos escrever

$$\underbrace{\mathcal{E}(j_1 = 1/2, j_2 = 1/2)} = \underbrace{\mathcal{E}(J=0) \oplus \mathcal{E}(J=1)}.$$

dimensão $= 4$

Caso de duas partículas de spin ½: (um outro olhar)

- Será que conseguiríamos deduzir, sem a diagonalização, que somente um $S=0$ e um $S=1$ estariam presentes em $\mathcal{E}(s_1=1/2, s_2=1/2)$?

  Lembre que podemos adicionar S_z entre os operadores $\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, S_{1z}, S_{2z}$ que definem $\mathcal{E}(s_1=1/2, s_2=1/2)$, pois ele comuta com todos. Desta forma, podemos escrever

$$\begin{cases} |++\rangle \text{ corresponde ao autovalor } M=+1 \text{ de } S_z \\ |--\rangle \text{ corresponde ao autovalor } M=-1 \text{ de } S_z \\ |+-\rangle \text{ corresponde ao autovalor } M=0 \text{ de } S_z \\ |-+\rangle \text{ corresponde ao autovalor } M=0 \text{ de } S_z \end{cases}$$

- Pergunta: será que o $M=1$ que apareceu acima, não poderia ser de $S=2$? A resposta é não, pois o sub-espaço $\mathcal{E}(s_1=1/2, s_2=1/2)$ é globalmente invariante mediante a aplicação de qualquer componente de $\mathbf{S}$, e se aplicássemos S_+ num ket correspondente à $S=2, M=1$, obteríamos $|S=2, M=2\rangle$. Como não existe nenhum ket, entre os que compõem a base 1, com esse valor de M, $S=2$, não é aceitável. Isso vale para qualquer outro valor de S, exceto $S=1$, pois S_+ aplicado em $|S=1, M=1\rangle$ é zero e não gera problemas. Ao aplicarmos S_- em $|S=1, M=1\rangle$, sabemos que vamos encontrar $|S=1, M=0\rangle$ e $|S=1, M=-1\rangle$. Ou seja, seguindo essa lógica, os 3 kets correspondentes à $|S=1, M\rangle$, precisam estar presentes. Agora falta apenas um ket com $M=0$ que segundo essa mesma lógica, só pode ser o $S=0$. Raciocínio será útil!

Caso geral: autovalores de J_z e suas degenerescências

- Para fazer a contabilidade das degenerescências dos autovalores de J_z em $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ (lembre que J_z é diagonal nesta base definida pelo C.C.O.C, $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_2^2, J_{1z}$ e J_{2z}), consideraremos $j_1 \geq j_2$. Sabemos que a dimensão deste sub-espaço é $(2j_1+1)(2j_2+1)$, e esse é o número de autovalores possíveis de J_z em $\mathcal{E}(j_1, j_2)$.
- Colocada de uma outra maneira, uma vez que
$$J_z|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = (m_1+m_2)\hbar|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle,$$
quantas vezes o valor $M = m_1 + m_2$ aparece, para $-j_1 \leq m_1 \leq +j_1$ e $-j_2 \leq m_2 \leq +j_2$?
- Primeiro é importante perceber que o maior valor possível de M é $j_1 + j_2$. (soma dos maiores). E o menor? $-j_1 - j_2$ (soma dos menores).
- Como m_1 e m_2, podem variar de um em um, é de se esperar que os valores possíveis de M, variem de um em um, entre esses extremos. Ou seja: M tem os possíveis valores: $j_1+j_2, j_1+j_2-1, j_1+j_2-2, ..., -(j_1+j_2)$.
- Chamaremos de $g_{j_1,j_2}(M)$ a degenerescência de M em $\mathcal{E}(j_1, j_2)$.
- Dois casos óbvios: quais seriam as degenerescências dos valores extremos de M? Para os valores extremos $\begin{cases} g_{j_1,j_2}(j_1+j_2) = 1 \\ g_{j_1,j_2}(-j_1-j_2) = 1 \end{cases}$

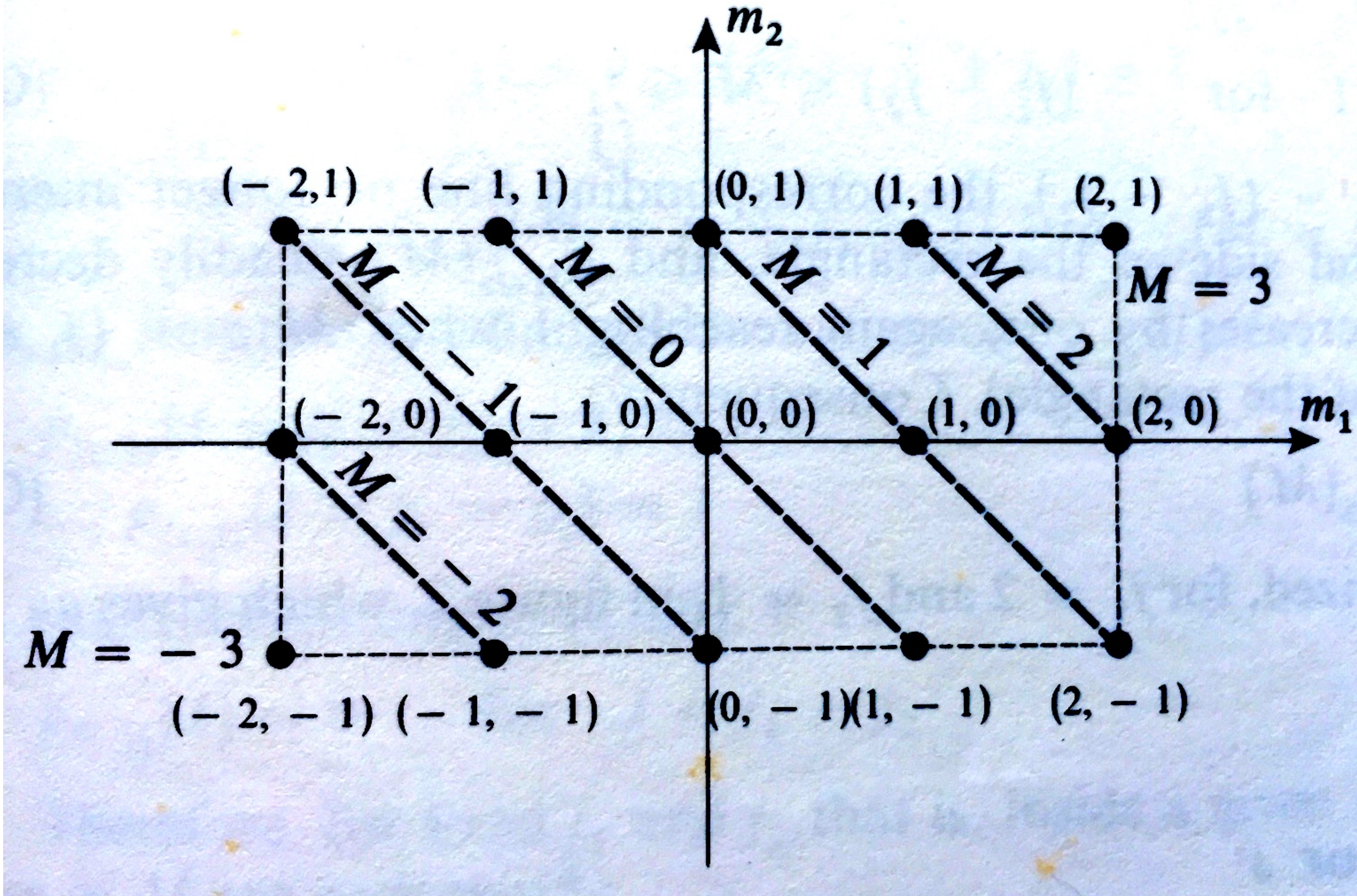

FIGURE 1 (do livro texto)

- A Fig.1 representa os 15 pontos possíveis associados com $j_1 = 2$ e $j_2 = 1$. Note que $g_{2,1}(M) =$ número de pontos nos segmentos pontilhados.

Autovalores de J_z e suas degenerescências: Figura 1

- Note que a contagem de pontos (15) da Fig.1 é simplesmente o produto $(2j_1+1)(2j_2+1)$, a dimensão do espaço em questão, o $\mathcal{E}(j_1, j_2)$. Essa dimensão é o número de kets linearmente independentes do espaço e à cada um deles podemos associar um único valor de M.
- Agora, é importante notar que $M = m_1 + m_2$ é uma reta de inclinação -1 na Fig. 1. Para ver isso, basta re-escrever essa expressão na forma $m_2 = -m_1 + M$. Os segmentos pontilhados, onde contamos pontos para calcular a degenerescência estão sobre retas deste tipo. Razão pela qual sua contagem faz sentido como degenerescência para um dado M, com todas as combinações de m_1 e m_2 que fornecem esse resultado.
- Vindo pela direita, note que a degenerescência começa em 1, no extremo superior direito do retângulo, e aumenta de um em um, até atingir um valor máximo (no caso, 3). Ela permanece constante (no caso, no valor 3), enquanto os segmentos de reta começarem no lado superior do retângulo e terminarem no lado inferior. Aí, a degenerescência decresce de um em um, até atingir o valor 1 novamente, agora no extremo inferior esquerdo do retângulo.
- Note que o maior valor para degenerescência pode ser generalizado e é igual à $2j_2+1$. Isso vale para todos os casos onde $j_1 \geq j_2$.

Autovalores de J_z e suas degenerescências: Figura 1

- Inspirado no caso, $j_1 = 2$ e $j_2 = 1$, é possível generalizar $(j_1 \geq j_2)$:

$$\forall j_1, j_2 \begin{cases} \text{Para } M = j_1 + j_2 \to g_{j_1,j_2}(j_1 + j_2) = 1; \\ \text{Para } M = -j_1 - j_2 \to g_{j_1,j_2}(-j_1 - j_2) = 1; \\ 2j_2 + 1 \to \text{máximo valor de } g_{j_1,j_2}(M) \begin{cases} \text{começa em } M = j_1 - j_2, \\ \text{termina em } M = j_2 - j_1; \end{cases} \\ \text{Permite contar grupos com degenerescência máxima: } 2(j_1 - j_2) + 1; \\ g_{j_1,j_2}(-M) = g_{j_1,j_2}(M). \end{cases}$$

- Com isso em mente, podemos escrever:

$$\begin{cases} g_{j_1,j_2}(j_1+j_2) = 1 \Rightarrow g_{2,1}(3) = 1 \\ g_{j_1,j_2}(j_1+j_2-1) = 2 \Rightarrow g_{2,1}(2) = 2 \\ \quad\vdots \\ g_{j_1,j_2}(j_1-j_2) = 2j_2 + 1 \Rightarrow g_{2,1}(1) = 3 \\ \quad\vdots \qquad\qquad = 2j_2 + 1 \Rightarrow g_{2,1}(0) = 3 \\ g_{j_1,j_2}(j_2-j_1) = 2j_2 + 1 \Rightarrow g_{2,1}(-1) = 3 \\ \quad\vdots \\ g_{j_1,j_2}(-j_1-j_2+1) = 2 \Rightarrow g_{2,1}(2) = 2 \\ g_{j_1,j_2}(-j_1-j_2) = 1 \Rightarrow g_{2,1}(3) = 1 \end{cases}$$

- E colocar isso numa figura (Fig. 2 do livro texto), no próximo slide.

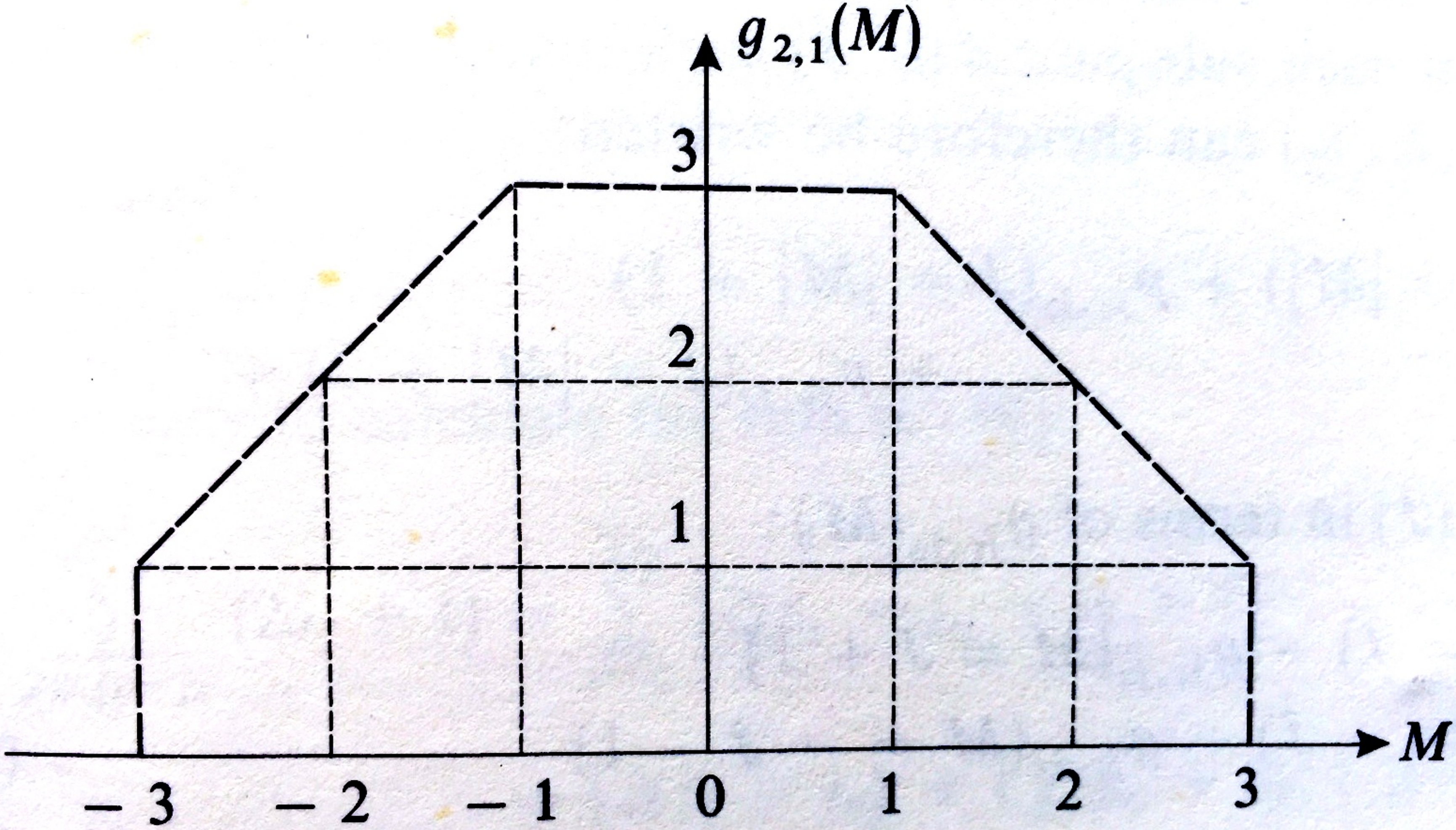

FIGURE 2 (do livro texto)

- A Fig.2 representa a degenerescência associada à cada M para o caso $j_1 = 2$ e $j_2 = 1$. Contagem dos pontos nos segmentos pontilhados da Fig 1.

Somando momentos angulares. Autovalores de J².

- Vimos que: $J_z|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle = (m_1+m_2)\hbar|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle$, com $J_z = J_{1z}+J_{2z}$.

  Os autovalores de $J_z, M\hbar$, são tais que $M = m_1+m_2$ com $\begin{cases} -j_1 \le m_1 \le +j_1 \\ \text{e} \\ -j_2 \le m_2 \le +j_2 \end{cases}$

  Concluímos que M tem os valores: $j_1+j_2, j_1+j_2-1, j_1+j_2-2, ..., -(j_1+j_2)$.

- Note que os $M's$ são $\begin{cases} \text{inteiros, se } j_1 \text{ e } j_2 \begin{cases} \text{ambos inteiros ou} \\ \\ \text{ambos semi-inteiros} \end{cases} \\ \\ \text{semi-inteiros, se } j_1 \text{ e } j_2 \begin{cases} \text{um é inteiro e o} \\ \\ \text{outro é semi-inteiro} \end{cases} \end{cases}$

- Com isso, o que podemos esperar de J? $\rightarrow \begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \\ \\ \mathbf{J}^2|J,M\rangle = J(J+1)\hbar^2|J,M\rangle \\ \\ -J \le M \le +J \text{ pulando de 1 em 1} \end{cases}$

- Os $J's$ $\begin{cases} \text{serão inteiros, se os } M's \text{ forem inteiros ou} \\ \text{serão semi-inteiros, se os } M's \text{ forem semi-inteiros} \end{cases}$

Somando momentos angulares. Autovalores de J².

- Entre os valores de M: $j_1+j_2, j_1+j_2-1, j_1+j_2-2, ..., -(j_1+j_2)$, o maior valor de M é j_1+j_2 $\therefore$ nenhum J, com valor maior que j_1+j_2 está presente.
- Para $J=j_1+j_2 \begin{cases} \text{associamos um sub-espaço } \mathcal{E}(k,J)=\{|J,M\rangle\}, -J\leq M\leq +J; \\ \text{e somente um sub-espaço, pois } M \text{ é não-degenerado} \end{cases}$
- O vetor associado ao valor $M=j_1+j_2-1$ aparece uma vez no $\mathcal{E}(k,J)$, mas vimos que esse autovalor é bi-degenerado. Assim, o sub-espaço associado à $J=j_1+j_2-1$ também precisa estar presente. E aqui de novo, só uma vez.
- Até agora $\mathcal{E}(j_1,j_2)=\mathcal{E}(k=1,J=j_1+j_2)\oplus\mathcal{E}(k=1,J=j_1+j_2-1)\oplus+...$
- Para continuar de forma geral, denote $P_{j_1,j_2}(J)$ o número de sub-espaços associados à um dado J. Isto é, o número de valores diferentes de k para esse valor de J (arbitrariamente, chamei de $k=1$ os casos acima, onde apareceu somente um sub-espaço de cada).
- Considere um valor de M qualquer (lembre que a esse valor corresponde um único vetor em cada $\mathcal{E}(k,J)$, devido a necessidade de $J\geq|M|$). Desta forma:

(1) $g_{j_1,j_2}(M)=P_{j_1,j_2}(J=|M|)+P_{j_1,j_2}(J=|M|+1)+P_{j_1,j_2}(J=|M|+2)...$

(2) $g_{j_1,j_2}(M=J)=P_{j_1,j_2}(J)+P_{j_1,j_2}(J+1)+P_{j_1,j_2}(J+2)...$

(3) $g_{j_1,j_2}(M=J+1)=P_{j_1,j_2}(J+1)+P_{j_1,j_2}(J+2)...$

(2) $-$ (3) $\rightarrow P_{j_1,j_2}(J)=g_{j_1,j_2}(M=J)-g_{j_1,j_2}(M=J+1)$

Somando momentos angulares. Autovalores de J².

- Como $g_{j_1,j_2}(-M)=g_{j_1,j_2}(M) \rightarrow P_{j_1,j_2}(J)=g_{j_1,j_2}(M=-J)-g_{j_1,j_2}(M=-J-1)$

★ **Explorando o resultado:** $P_{j_1,j_2}(J) = g_{j_1,j_2}(M = J) - g_{j_1,j_2}(M = J+1)$

- Se $J > j_1 + j_2$, quanto vale $P_{j_1,j_2}(J)$? 0 pois, $g_{j_1,j_2}(M)=0$ para $M=J > j_1+j_2$. Lembre que o maior valor de M é $j_1 + j_2$.
- E se $J = j_1 + j_2$? $P_{j_1,j_2}(J) = 1$ pois, $g_{j_1,j_2}(j_1 + j_2) = 1$ e $g_{j_1,j_2}(j_1 + j_2 + 1) = 0$.
- E se $J = j_1 + j_2 - 1$? $P_{j_1,j_2}(J)=1$ pois, $g_{j_1,j_2}(j_1+j_2 - 1)=2$ e $g_{j_1,j_2}(j_1 + j_2)=1$. Lembrando da escada de um degrau, os valores continuam sendo 1 até $j_1 - j_2$.
- E se $J = j_1 - j_2$? $P_{j_1,j_2}(J)=1$ pois, $g_{j_1,j_2}(j_1-j_2)=n$ e $g_{j_1,j_2}(j_1-j_2+1)=n-1$. No slide 13 vimos que $n = 2j_2 + 1$, se $j_1 \geq j_2$.
- Vimos que a partir de j_1-j_2, $g_{j_1,j_2}(J)$ fica constante até $M=-(j_1-j_2)$. Isso faz $P_{j_1,j_2}(J)=0$, para $0 \leq J < j_1 - j_2$.
- Isso tudo permite concluir que os valores de J que contribuem estão no intervalo
$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2.$$
- O sub-espaço $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ também pode ser descrito pelos kets $\{|j_1, j_2; J, M\rangle\}$, mas os valores de J estão restritos ao intervalo acima. Isso pode ser expressado da seguinte forma: $\mathcal{E}(j_1, j_2)=\sum_{\oplus J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{E}(k, J)$ (k aparece uma única vez para cada J).

Ignoraremos k daqui para frente

Somando momentos angulares. Comentários:

- $\mathcal{E}(j_1,j_2) = \sum_{\oplus J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{E}(J)$ com $\mathcal{E}(J) = \{|j_1,j_2;J,M\rangle,\ |j_1-j_2| \le J \le j_1+j_2\}$
- Note que para cada par de valores J, M existe um único vetor em $\mathcal{E}(j_1,j_2)$. Portanto, os operadores $\mathbf{J}^2$, e $J_z\}$ formam um C.C.O.C. em $\mathcal{E}(j_1,j_2)$.
- Qual será o número de pares (J,M) em $\mathcal{E}(j_1,j_2)$? Que tal $\sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(2J+1)$?

  Se adotarmos, como temos feito, $j_1 \ge j_2$ e $J = j_1 - j_2 + i$, a soma fica:

$$\sum_{i=0}^{2j_2}[2j_1-2j_2+2i+1] = \sum_{i=0}^{2j_2}[2j_1-2j_2+1] + \sum_{i=0}^{2j_2}[2i] =$$

$$= [2j_1-2j_2+1]\underbrace{(2j_2+1)}_{\text{número de possibilidades}} + 2\overbrace{\frac{2j_2}{2}}^{\text{Valor médio de i}}\underbrace{(2j_2+1)}_{},\ \text{ou seja}$$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(2J+1) = [2j_1-2j_2+1+2j_2](2j_2+1) = (2j_1+1)(2j_2+1),$$

conforme esperado (dimensão de $\mathcal{E}(j_1,j_2)$).