Somando momentos angulares: Duas partículas com spin ½.

O ket estado arbitrário de 2 spins pode ser expandido de duas (de novo) formas.

$$\text{representações}\begin{cases}\{\underbrace{m_1}_{S_{1z}},\underbrace{m_2}_{S_{2z}}\} \\ |++\rangle,|+-\rangle,|-+\rangle,|--\rangle \\ \\ \{\underbrace{S}_{S^2},\underbrace{M}_{S_z}\}\text{(representação singleto e tripleto)} \\ |S=1,M={}^{0}_{\pm1}\rangle \text{ e } |S=0,M=0\rangle\end{cases}$$

Em ambas as representações temos 4 kets. Qual estratégia para relacioná-los?

$$\text{Que tal}\begin{cases}|S=1,M=1\rangle=|++\rangle \text{ (dois elétrons com spin para cima)} \\ |S=1,M=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+-\rangle+|-+\rangle\big) \text{ (aplique } S_-=S_{1-}+S_{2-} \text{ acima)} \\ |S=1,M=-1\rangle=|--\rangle \text{ (aplique } S_-=S_{1-}+S_{2-} \text{ acima de novo)} \\ |S=0,M=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+-\rangle-|-+\rangle\big) \text{ (exija ortogonalidade com } |S=1,M=0\rangle)\end{cases}$$

Ex: $S_-|S=1,M=1\rangle=\sqrt{(S+M)(S-M+1)}|S=1,M=0\rangle=\sqrt{2}|1,0\rangle$

$$S_{1-}|++\rangle+S_{2-}|++\rangle=\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}|-+\rangle+\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}|+-\rangle=$$

$$=|-+\rangle+|+-\rangle\ \therefore\ |1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|-+\rangle+|+-\rangle\big)$$

Somando momentos angulares: Duas partículas com spin ½.

- Repita o procedimento do exemplo do slide anterior e ache $|S=1,M=-1\rangle$.
- Para achar $|S=0,M=0\rangle$, lembre que $S=0$ é a única possibilidade, além de $S=1$, pois, $|s_1-s_2|\leq S\leq s_1+s_2$, ou seja $0\leq S\leq 1$ e suponha que o ket procurado seja uma combinação de todos os kets de $\mathcal{E}(s_1,s_2)$ com $M=0$, isto é, $|S=0,M=0\rangle=\alpha|+-\rangle+\beta|-+\rangle$. Imponha que $\begin{cases}\langle 0,0|0,0\rangle=1\\ \langle 1,0|0,0\rangle=0\end{cases}$ para achar α e β.
- De $\begin{cases}\langle 0,0|0,0\rangle=1\rightarrow|\alpha|^2+|\beta|^2=1\\ \langle 1,0|0,0\rangle=0\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\{\langle+-|+\langle-+|\}\{\alpha|+-\rangle+\beta|-+\rangle\}=0\end{cases}$

  Assim, temos $\begin{cases}\alpha+\beta=0\rightarrow\beta=-\alpha\\ \\ |\beta|^2+|\alpha|^2=1\end{cases}\Rightarrow 2|\alpha|^2=1\therefore|\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- Ou seja, podemos escrever $\alpha=\dfrac{e^{i\chi}}{\sqrt{2}},\beta=-\dfrac{e^{i\chi}}{\sqrt{2}}$
- Achamos α e β a menos de uma fase. Ao colocarmos de volta na, expressão, $|S=0,M=0\rangle=\alpha|+-\rangle+\beta|-+\rangle=\dfrac{e^{i\chi}}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle)$, notamos que é uma fase global e escolhemos $\chi=0$.

Somando momentos angulares. Caso Geral.

Dados $\mathbf{J_1}$ e $\mathbf{J_2}$,

$$\text{sabemos que} \begin{cases} [J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{1k} \\ [J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{2k} \\ [J_{1i}, J_{2j}] = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2} \\ \mathbf{J} = \mathbf{J_1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{J_2} \\ [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \end{cases}$$

Notamos, entretanto, que embora $[J^2, J_z] = 0$, tínhamos $\begin{cases} [J^2, J_{1z}] \neq 0 \\ [J^2, J_{2z}] \neq 0 \end{cases}$

Com isso em mente, escolhemos duas bases:

A) Base de autokets de $J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$

$$\begin{cases} J_1^2|j_1j_2;m_1m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1j_2;m_1m_2\rangle \\ J_2^2|j_1j_2;m_1m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1j_2;m_1m_2\rangle \\ J_{1z}|j_1j_2;m_1m_2\rangle = m_1\hbar|j_1j_2;m_1m_2\rangle \\ J_{2z}|j_1j_2;m_1m_2\rangle = m_2\hbar|j_1j_2;m_1m_2\rangle \end{cases}$$

B) Base de autokets de J_1^2, J_2^2, J^2, J_z

$$\begin{cases} J_1^2|j_1j_2;JM\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1j_2;JM\rangle \\ J_2^2|j_1j_2;JM\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1j_2;JM\rangle \\ J^2|j_1j_2;JM\rangle = J(J+1)\hbar^2|j_1j_2;JM\rangle \\ J_z|j_1j_2;JM\rangle = M\hbar|j_1j_2;JM\rangle \end{cases}$$

Agora, vamos relaciona-las para o caso geral. Lembre que para que a base B descreva o sub-espaço $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ é preciso ter todos os $J's$, tais que, $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$.

Somando momentos angulares. Caso Geral.

Considere uma transformação unitária que liga as duas bases

$$|j_1 j_2; JM\rangle = \mathbb{1}|j_1 j_2; JM\rangle = \sum_{\underbrace{m_1 m_2}_{\substack{\text{Não somamos} \\ \text{em } j_1 \text{ e } j_2. \\ \text{Porque?}}}} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; JM\rangle}_{\substack{\text{Coeficientes de} \\ \text{Clebsch-Gordan}}}$$

Propriedades importantes dos Clebsch-Gordan $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; JM\rangle$

1) Os coeficientes são nulos, a menos que $M = m_1 + m_2$. Para provar isso, observe que $(J_z - J_{1z} - J_{2z})|j_1 j_2; JM\rangle = 0$ e que isso implica em
$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 |(J_z - J_{1z} - J_{2z})| j_1 j_2; JM\rangle = (M - m_1 - m_2)\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; JM\rangle = 0.$
Para que o coeficiente seja diferente de zero, é preciso que $M = m_1 + m_2$.

2) Os coeficientes são nulos, a menos que $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$. Mostramos que

$\mathcal{E}(j_1, j_2) = \sum_{\oplus J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{E}(J)$ e que portanto, a dimensão do sub-espaço descrito por

$\{|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle\}$ é igual à do sub-espaço $\{|j_1 j_2; JM\rangle, |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2\}$.

Coeficientes de Clebsch-Gordan. Fórmulas de recorrência.

Fixe j_1, j_2 e J : os coeficientes com diferentes m_1 e m_2 estão relacionados entre si por relações de recorrência. Comece por:

$$J_\pm|j_1 j_2; JM\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \sum_{m_1' m_2'} |j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle\langle j_1 j_2; m_1' m_2'|j_1 j_2; JM\rangle$$

$$\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}|j_1 j_2; JM \pm 1\rangle =$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} \{\sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1' + 1)}|j_1 j_2; m_1' \pm 1 m_2'\rangle +$$

$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2')(j_2 \pm m_2' + 1)}|j_1 j_2; m_1' m_2' \pm 1\rangle\}\langle j_1 j_2; m_1' m_2'|j_1 j_2; JM\rangle$$

Multiplique pela esquerda por $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|$

$$\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; JM \pm 1\rangle =$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} \{\sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1' + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; m_1' \pm 1 m_2'\rangle +$$

$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2')(j_2 \pm m_2' + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; m_1' m_2' \pm 1\rangle\}\langle j_1 j_2; m_1' m_2'|j_1 j_2; JM\rangle$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} \{\sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1' + 1)}\delta_{m_1, m_1' \pm 1}\delta_{m_2 m_2'} +$$

$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2')(j_2 \pm m_2' + 1)}\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2, m_2' \pm 1}\}\langle j_1 j_2; m_1' m_2'|j_1 j_2; JM\rangle$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan. Fórmulas de recorrência.

Repetindo a última equação do slide anterior, temos

$$\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; JM \pm 1\rangle =$$
$$= \sum_{m_1' m_2'} \{\sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1' + 1)}\delta_{m_1, m_1' \pm 1}\delta_{m_2 m_2'} +$$
$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2')(j_2 \pm m_2' + 1)}\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2, m_2' \pm 1}\}\langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; JM\rangle =$$
$$= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm (m_1 \mp 1) + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; JM\rangle +$$
$$+ \sqrt{(j_2 \mp (m_2 \mp 1))(j_2 \pm (m_2 \mp 1) + 1)}\langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; JM\rangle$$

Desta forma gera-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; JM \pm 1\rangle =$$
$$= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; JM\rangle +$$
$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1))(j_2 \pm m_2)}\langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; JM\rangle$$

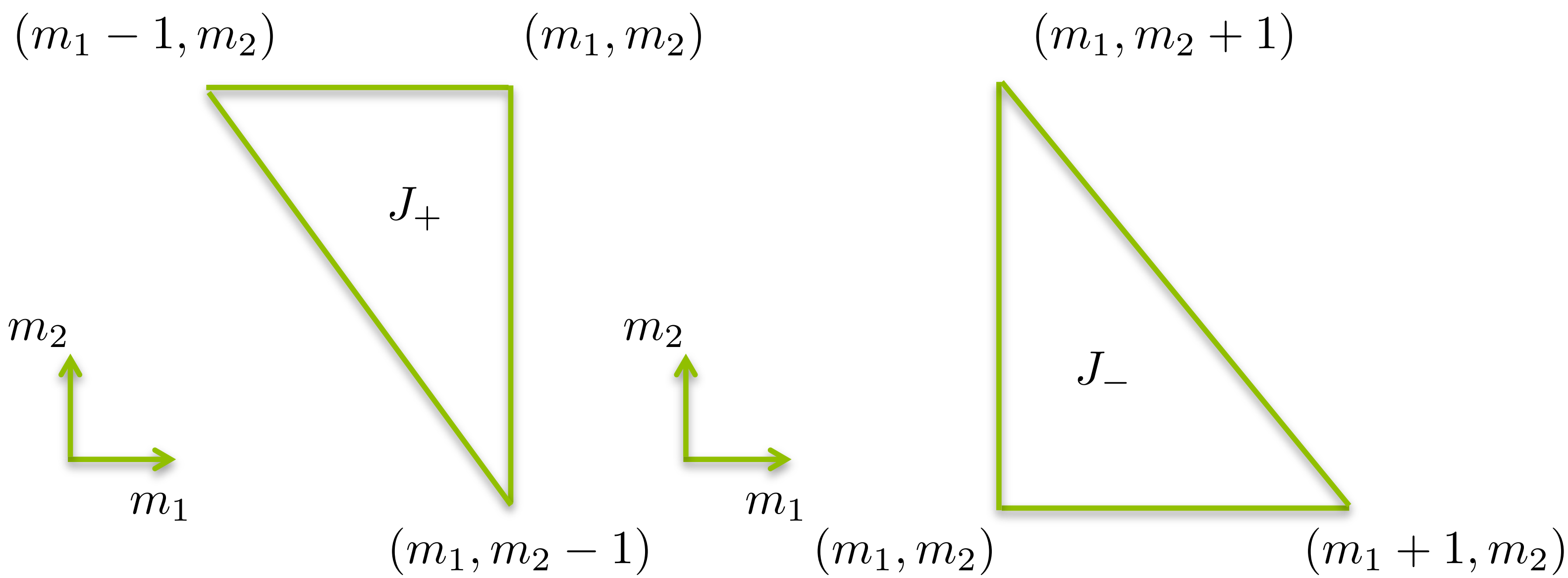
Note que os três coeficientes de Clebsch-Gordon indicam que nesta fórmula de recorrência: $m_1 + m_2 = M \pm 1$

Usando as fórmulas de recorrência.

A fórmula de recorrência:

$$\sqrt{(j\mp M)(j\pm M+1)}\langle j_1j_2;m_1m_2|j_1j_2;JM\pm 1\rangle =$$
$$=\sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\langle j_1j_2;m_1\mp 1,m_2|j_1j_2;JM\rangle +$$
$$+\sqrt{(j_2\mp m_2+1))(j_2\pm m_2)}\langle j_1j_2;m_1,m_2\mp 1|j_1j_2;JM\rangle$$

pode ser representada graficamente no plano: (m_1,m_2)

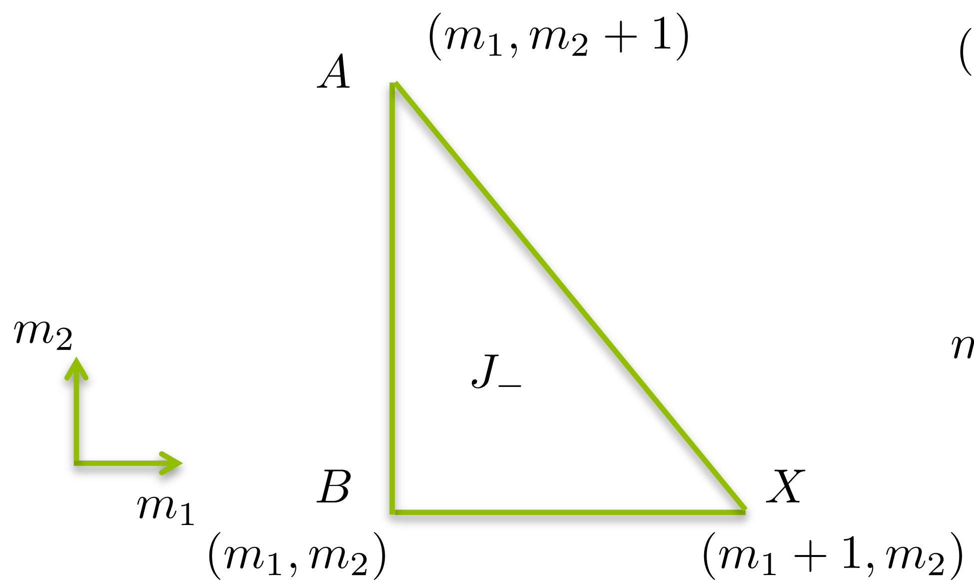


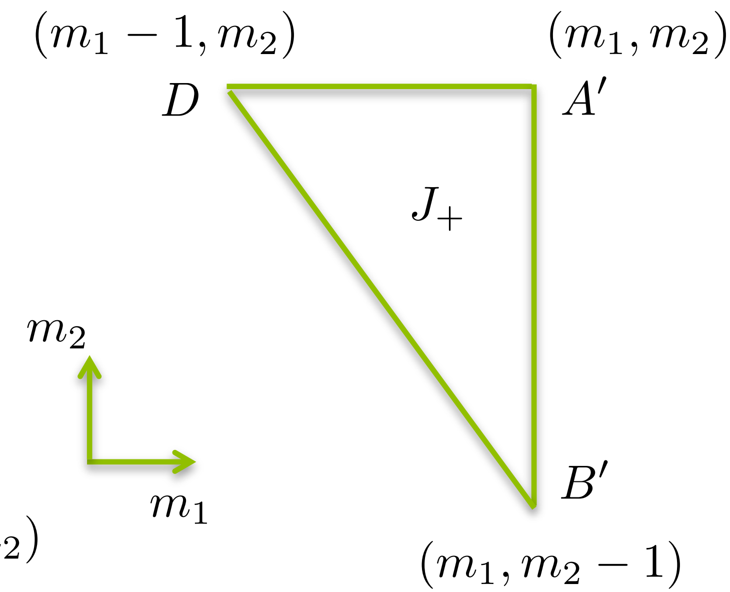
As fórmulas de recorrência definidas acima, juntamente com condições de normalização, quase determinam unicamente todos os coeficientes de Clebsch-Gordon. Quase porque certos sinais têm que ser especificados por convenção.

Usando as fórmulas de recorrência.

como gerar coeficientes?

$$\begin{cases} 1) \text{ Tome na figura } \begin{cases} A = (m_1, m_2 + 1) \\ B = (m_1, m_2) \\ X = (m_1 + 1, m_2) \end{cases} \\ 2) \text{ Escolha } A \text{ tal que } m_1 = j_1 \\ 3) \text{ Use } J_- \text{ para gerar } B \\ 4) \text{ Note que } X \text{ é proibido, pois } m_1 \text{ seria maior que } j_1 \end{cases}$$





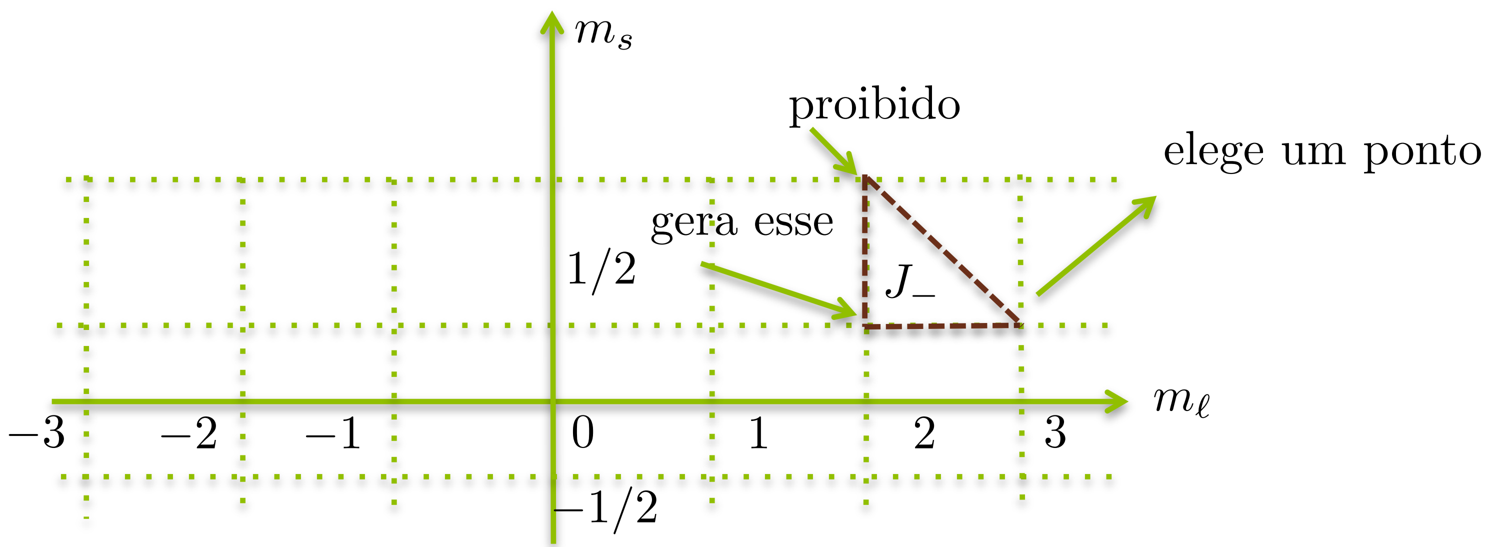
Depois, redefina $A' = A$ e $B' = B$ no gráfico de J_+ e gere D. Repita com novos triângulos (com dois vértices conhecidos) e ache todos os m_1, m_2 e $M's$ para j_1, j_2 e J fixos.

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Testemos o procedimento para o caso $\boxed{\underbrace{j_1 = \ell}_{m_\ell} \text{ e } \underbrace{j_2 = s = 1/2}_{m_s = \pm 1/2}}$

Quanto vale J? $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \rightarrow \begin{cases} \text{Se } \ell = 0 \rightarrow J = 1/2 \\ \text{Se } \ell > 0 \rightarrow J = \ell \pm 1/2 \end{cases}$

Na linguagem de espectroscopia $\ell = 1 \rightarrow p$ e $\begin{cases} J = 1/2 \rightarrow p_{1/2} \\ J = 3/2 \rightarrow p_{3/2} \end{cases}$



Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Assim, a fórmula de recorrência do slide 7

$$\sqrt{(J \mp M)(J \pm M+1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; JM \pm 1\rangle =$$
$$= \sqrt{(j_1 \mp m_1+1)(j_1 \pm m_1)}\langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; JM\rangle +$$
$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2+1))(j_2 \pm m_2)}\langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; JM\rangle,$$

caso J_- (sinal inferior), para $j_1 = \ell, j_2 = s = 1/2$ e $J = \ell + 1/2$ fixos, iniciando com $m_2 = m_s = 1/2$, fica:

$$\sqrt{(\ell+1/2+M)(\ell+1/2-M+1)}\langle m_\ell, 1/2 | \ell+1/2, M-1\rangle =$$
$$= \sqrt{(\ell+m_\ell+1)(\ell-m_\ell)}\langle m_\ell+1, 1/2 | l+1/2, M\rangle +$$
$$+ \sqrt{(1/2+1/2+1)(1/2-1/2)}\langle m_\ell, 1/2+1 | \ell+1/2, M\rangle$$

Com a substituição $M \Rightarrow M+1$ temos:

$$\sqrt{(\ell+M+3/2)(\ell-M+1/2)}\langle m_\ell, 1/2 | \ell+1/2, M\rangle =$$
$$= \sqrt{(\ell+m_\ell+1)(\ell-m_\ell)}\langle m_\ell+1, 1/2 | l+1/2, M+1\rangle \text{ com } \begin{cases} M = m_\ell + 1/2 \\ \text{substitua} \\ m_\ell = M - 1/2 \end{cases}$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Com a nova substituição temos

$$\sqrt{(\ell+M+3/2)(\ell-M+1/2)}\langle M-1/2,1/2|\ell+1/2,M\rangle =$$

$$= \sqrt{(\ell+M+1/2)(\ell-M+1/2)}\langle M+1/2,1/2|l+1/2,M+1\rangle$$

e finalmente

$$\langle M-1/2,1/2|\ell+1/2,M\rangle = \sqrt{\frac{\ell+M+1/2}{\ell+M+3/2}}\langle M+1/2,1/2|l+1/2,M+1\rangle$$

Note que os dois coeficientes diferem de 1 em M. Assim podemos substituir o coeficiente da direita usando a mesma regra, isto é:

$$\langle M+1/2,1/2|l+1/2,M+1\rangle = \sqrt{\frac{\ell+M+3/2}{\ell+M+5/2}}\langle M+3/2,1/2|l+1/2,\overbrace{M+2}^{\text{tem que parar em } \ell+1/2}\rangle$$

Que tal escrevermos:

$$\langle M-1/2,1/2|\ell+1/2,M\rangle = \sqrt{\frac{\ell+M+1/2}{\ell+M+3/2}}\sqrt{\frac{\ell+M+3/2}{\ell+M+5/2}}\sqrt{\frac{\ell+M+5/2}{\ell+M+7/2}}\cdots$$

$$\cdots\sqrt{\frac{\ell+(\ell-1/2)+1/2}{\ell+(\ell+1/2)+1/2}}\langle \ell,1/2|l+1/2,\ell+1/2\rangle$$

$$\therefore \langle M-1/2,1/2|\ell+1/2,M\rangle = \sqrt{\frac{\ell+M+1/2}{2\ell+1}}\langle \ell,1/2|l+1/2,\ell+1/2\rangle$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Usamos:

1) O denominador do fator que precede o C.C.G. é igual a soma $J+M$.

2) O denominador à esquerda cancela com o numerador à direita.

3) Agora note o seguinte:
$|m_\ell=\ell, m_s=1/2\rangle$ tem $M=\ell+1/2$, o maior possível e precisa estar associado à $J=\ell+1/2$ (o $J=\ell-1/2$ seria menor que M).
$\therefore\ |m_\ell=\ell, m_s=1/2\rangle \propto |J=\ell+1/2, M=\ell+1/2\rangle$ por convenção, são feitos iguais. Isto é $|\ell,1/2\rangle=|\ell+1/2,\ell+1/2\rangle$ e $\therefore\ \langle\ell,1/2|\ell+1/2,\ell+1/2\rangle=1$

Nestas condições: $$\boxed{\langle M-1/2,1/2|\ell+1/2,M\rangle=\sqrt{\frac{\ell+M+1/2}{2\ell+1}}} \rightarrow \boxed{m_s=½}$$

Falta o $m_s=-1/2$ que obteremos em seguida.

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Até aqui, encontramos:

$$\langle \underbrace{M-1/2}_{m_\ell}, \underbrace{1/2}_{m_s} \,|\, \underbrace{\ell+1/2}_{J}, M\rangle = \sqrt{\frac{\ell+M+1/2}{2\ell+1}}$$

e falta o coeficiente de Clebsch-Gordan associado ao $m_s = -1/2$

Para melhor entender isso, considere:

$$|\ell+1/2, M\rangle = \sum_{m_\ell m_s} |\ell\ 1/2; m_\ell m_s\rangle\langle \ell\ 1/2; m_\ell m_s|\ell+1/2, M\rangle =$$

$$= \sum_{m_\ell m_s} |m_\ell m_s\rangle\langle m_\ell m_s|\ell+1/2, M\rangle = \sum_{m_\ell} |m_\ell\ 1/2\rangle \underbrace{\langle m_\ell\ 1/2|\ell+1/2, M\rangle}_{m_\ell+1/2=M} +$$

$$+ \sum_{m_\ell} |m_\ell\ -1/2\rangle \underbrace{\langle m_\ell\ -1/2|\ell+1/2, M\rangle}_{m_\ell-1/2=M}$$

$$= |M-1/2, 1/2\rangle \underbrace{\langle M-1/2, 1/2|\ell+1/2, M\rangle}_{\text{temos esse}} +$$

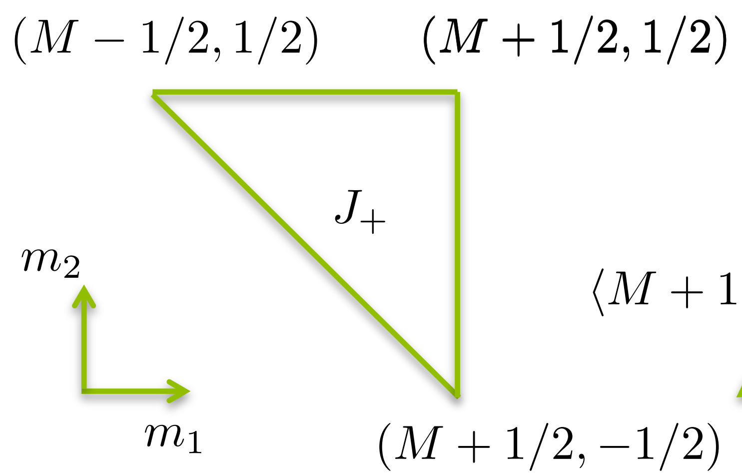
$$+ |M+1/2, -1/2\rangle \underbrace{\langle M+1/2, -1/2|\ell+1/2, M\rangle}_{\text{falta esse}}$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Observe que a fórmula de recorrência do J_+ fornece um deles, em função de dois conhecidos:

$$\langle M-1/2, 1/2 | \ell+1/2, M\rangle = = \sqrt{\frac{\ell+M+1/2}{2\ell+1}}$$

$$\langle M+1/2, 1/2 | \ell+1/2, M+1\rangle = = \sqrt{\frac{\ell+(M+1)+1/2}{2\ell+1}}$$



$$\langle M+1/2, -1/2 | \ell+1/2, M\rangle$$

Da fórmula do J_+ tome: $j_1=\ell, j_2=1/2, J=\ell+1/2$ e $\begin{cases} m_1 = M+1/2 \\ m_2 = 1/2 \end{cases}$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Isso fornece:

$$\sqrt{[(\ell+1/2)-M][(\ell+1/2)+M+1]}\langle \ell s; M+1/2, 1/2|\ell s; \ell+1/2, M+1\rangle =$$
$$= \sqrt{[(\ell-(M+1/2)+1][\ell+(M+1/2)]}\langle \ell s; M+1/2-1, 1/2|\ell s; \ell+1/2, M\rangle +$$
$$+ \sqrt{[1/2-1/2+1][1/2+1/2]}\langle \ell s; M+1/2, 1/2-1|\ell s; \ell+1/2, M\rangle$$

Simplificando a fórmula, temos:

$$\sqrt{(\ell-M+1/2)(\ell+M+3/2)}\langle M+1/2, 1/2|\ell+1/2, M+1\rangle =$$
$$= \sqrt{(\ell-M+1/2)(\ell+M+1/2)}\langle M-1/2, 1/2|\ell+1/2, M\rangle +$$
$$+ \langle M+1/2, -1/2|\ell+1/2, M\rangle \;\; \therefore$$

$$\langle M+1/2, -1/2|\ell+1/2, M\rangle = \sqrt{(\ell-M+1/2)(\ell+M+3/2)}\sqrt{\frac{(\ell+M+3/2)}{2\ell+1}} +$$
$$- \sqrt{(\ell-M+1/2)(\ell+M+1/2)}\sqrt{\frac{(\ell+M+1/2)}{2\ell+1}} =$$
$$= \big(\ell+M+3/2-(\ell+M+1/2)\big)\sqrt{\frac{(\ell-M+1/2)}{2\ell+1}} = \sqrt{\frac{(\ell-M+1/2)}{2\ell+1}}$$

e finalmente, podemos, a seguir, escrever $|\ell s; \ell+1/2, M\rangle$ na base $\{m_1, m_2\}$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Isto é: $|\ell s; \underbrace{\ell+1/2, M}_{\text{base } J, M}\rangle =$

$$= \sqrt{\frac{(\ell+M+1/2)}{2\ell+1}}|\ell s; \underbrace{M-1/2, 1/2}_{\text{base } m_1, m_2}\rangle + \sqrt{\frac{(\ell-M+1/2)}{2\ell+1}}|\ell s; \underbrace{M+1/2, -1/2}_{\text{base } m_1, m_2}\rangle$$

Na representação das coordenadas e linguagem de spinor, temos:

$$\mathcal{Y}_\ell^{J=\ell+1/2,M} = \sqrt{\frac{(\ell+M+1/2)}{2\ell+1}} Y_\ell^{M-1/2}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} +$$

$$+\sqrt{\frac{(\ell-M+1/2)}{2\ell+1}} Y_\ell^{M+1/2}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}\begin{pmatrix}\sqrt{\ell+M+1/2}\; Y_\ell^{M-1/2}\\ \\ \sqrt{\ell-M+1/2}\; Y_\ell^{M+1/2}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Y}_\ell^{J=\ell+1/2,M} \text{ autofunções de } \begin{cases}\mathbf{L}^2\\ \mathbf{S}^2\\ \mathbf{J}^2\\ J_z,\end{cases} \text{ c/ autovalores } \begin{cases}\ell(\ell+1)\hbar^2\\ 3/4\hbar^2\\ J(J+1)\hbar^2 \text{ com } J=\ell+1/2\\ M\hbar\end{cases}$$

Mostre que também é autoestado de $\mathbf{L}.\mathbf{S}$ (justifique) com autovalor $\dfrac{\ell\hbar^2}{2}$.

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Comentários adicionais: sobre a família de CG para $J = \ell - 1/2$

$$|\ell - 1/2, M\rangle = \sum_{m_\ell m_s} |\ell\ 1/2; m_\ell m_s\rangle\langle \ell\ 1/2; m_\ell m_s|\ell - 1/2, M\rangle =$$

$$= \sum_{m_\ell m_s} |m_\ell m_s\rangle\langle m_\ell m_s|\ell - 1/2, M\rangle.$$ Considere primeiro $M = \ell - 1/2$

$$|\underbrace{\ell - 1/2}_{J}, \underbrace{\ell - 1/2}_{M}\rangle = |\underbrace{\ell}_{m_\ell}, \underbrace{-1/2}_{m_s}\rangle\langle \ell, -1/2|\ell - 1/2, \ell - 1/2\rangle +$$

$$+ |\underbrace{\ell - 1}_{m_\ell}, \underbrace{1/2}_{m_s}\rangle\langle \ell - 1, 1/2|\ell - 1/2, \ell - 1/2\rangle$$

Note que envolvem os mesmos kets $|m_\ell\ m_s\rangle$, pois são os únicos que garantem $M = \ell - 1/2 = m_\ell + m_s$.

E para obtê-lo $\begin{cases} (1) \text{ faça-o ortogonal à: } |\ell + 1/2, \ell - 1/2\rangle \\ (2) \text{ normalize-o e} \\ (3) \text{ tome CG's reais.} \end{cases}$

Para o item (1), temos do slide 16 (basta fazer $M = \ell - 1/2$) :

$$|\ell + 1/2, \ell - 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2\ell}{2\ell+1}}|\ell - 1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{2\ell+1}}|\ell, -1/2\rangle.$$ Refazendo a

receita, temos $$\boxed{\mathcal{Y}_\ell^{J=\ell\pm1/2,M} = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\ell \pm M + \frac{1}{2}}\ Y_\ell^{M-1/2}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\ell \mp M + \frac{1}{2}}\ Y_\ell^{M+1/2}(\theta,\phi) \end{pmatrix}}$$