Sistema de Partículas Idênticas

- O que faremos $\begin{cases} \bullet \text{ Partículas idênticas } \Rightarrow \text{ Ambiguidade nas medidas;} \\ \bullet \text{ Um novo postulado para resolver isso!;} \\ \bullet \text{ Operadores de permutação: uma ferramenta eficiente.} \end{cases}$
- Definição: Duas partículas são idênticas se todas as suas propriedades intrínsecas (massa, spin, carga, etc.) são exatamente as mesmas. Ou seja,

  Nenhuma experiência pode distinguir uma da outra.

  ◦ Consequência da Definição: Quando um sistema físico contém duas partículas idênticas, não existirá nenhuma mudança em suas propriedades e em sua evolução temporal, se os papéis dessas duas partículas forem trocados.

  ◦ Note que pósitrons são diferentes de elétrons, independentemente das condições experimentais (mesmo que não se meça a carga, eles nunca podem ser tratados como partículas idênticas).
- Partículas idênticas em mecânica clássica, onde o futuro do sistema pode ser

  conhecido via $\begin{cases} \text{Lagrangeana } \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \mathbf{v_1}; \mathbf{r_2}, \mathbf{v_2}), \\ \text{ou se preferir,} \\ \text{Hamiltoniana} \Rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{r_1}, \mathbf{p_1}; \mathbf{r_2}, \mathbf{p_2}), \end{cases}$

  se conhecemos as condições iniciais do problema $\begin{cases} \mathbf{r_1}(t_0); \mathbf{v_1}(t_0); \\ \mathbf{r_2}(t_0); \mathbf{v_2}(t_0). \end{cases}$

Sistema de Partículas Idênticas

- Conhecer as condições iniciais e a Lagrangeana (ou se preferir, a Hamiltoniana), implica conhecer o futuro do sistema: $\begin{cases} \mathbf{r_1}(t_0); \mathbf{v_1}(t_0) \Rightarrow \mathbf{r_1}(t); \mathbf{v_1}(t) \\ \mathbf{r_2}(t_0); \mathbf{v_2}(t_0) \Rightarrow \mathbf{r_2}(t); \mathbf{v_2}(t) \end{cases}$

- Partículas idênticas exigem $\begin{cases} \text{Lagrangeana } \mathcal{L}(\mathbf{r_1}, \mathbf{v_1}; \mathbf{r_2}, \mathbf{v_2}) = \mathcal{L}(\mathbf{r_2}, \mathbf{v_2}; \mathbf{r_1}, \mathbf{v_1}) \\ \text{Hamiltoniana } \mathcal{H}(\mathbf{r_1}, \mathbf{p_1}; \mathbf{r_2}, \mathbf{p_2}) = \mathcal{H}(\mathbf{r_2}, \mathbf{p_2}; \mathbf{r_1}, \mathbf{p_1}), \end{cases}$

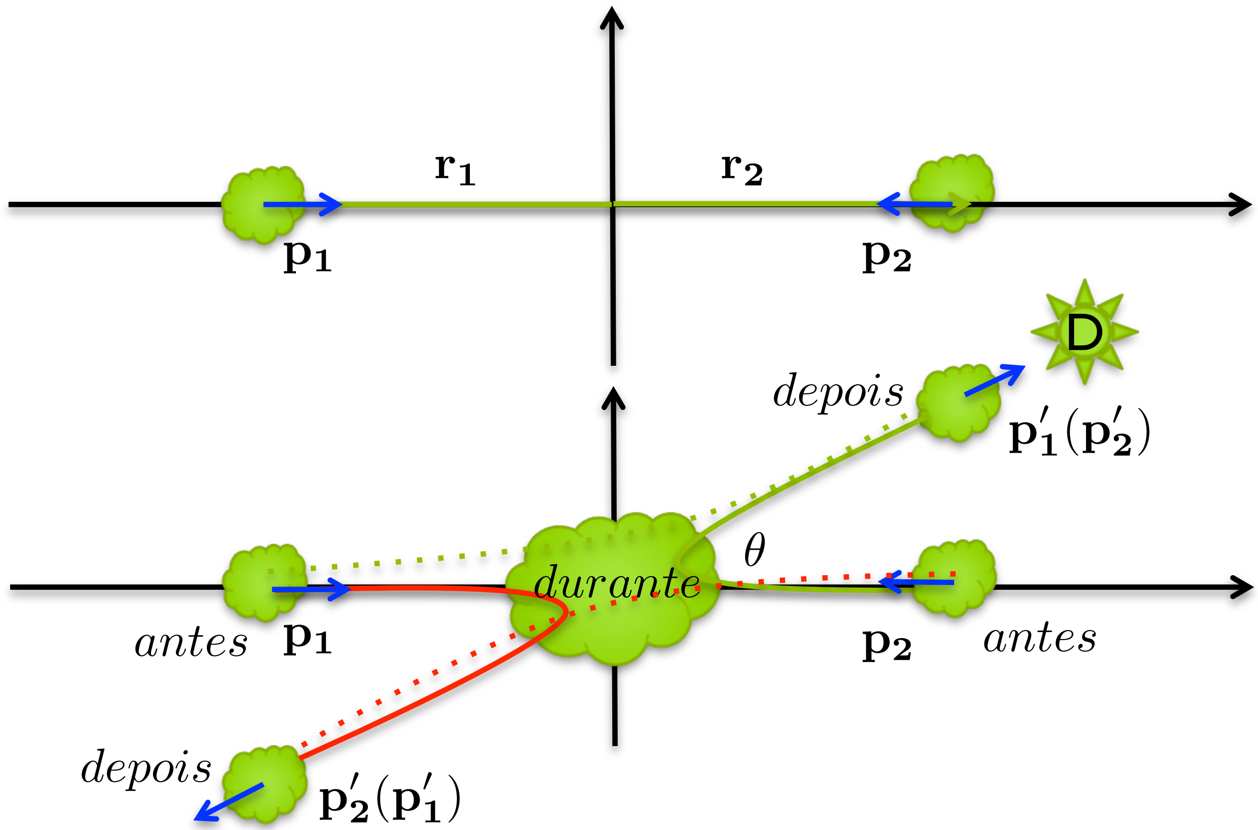
  se trocarmos as condições iniciais do problema de $\begin{cases} \mathbf{r_1}(t_0) = \mathbf{r_0}; \mathbf{v_1}(t_0) = \mathbf{v_0}; \\ \mathbf{r_2}(t_0) = \mathbf{r'_0}; \mathbf{v_2}(t_0) = \mathbf{v'_0}. \end{cases}$

  para $\begin{cases} \mathbf{r_1}(t_0) = \mathbf{r'_0}; \mathbf{v_1}(t_0) = \mathbf{v'_0}; \\ \mathbf{r_2}(t_0) = \mathbf{r_0}; \mathbf{v_2}(t_0) = \mathbf{v_0}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{\mathbf{r_1}(t)} = \underbrace{\mathbf{r_2}(t)}; \underbrace{\mathbf{v_1}(t)} = \underbrace{\mathbf{v_2}(t)}; \\ \text{depois, antes, depois, antes da troca.} \\ \overbrace{\mathbf{r_2}(t)} = \overbrace{\mathbf{r_1}(t)}; \overbrace{\mathbf{v_2}(t)} = \overbrace{\mathbf{v_1}(t)}. \end{cases}$

  - Ou seja a trajetória da partícula está definida unicamente pela condição inicial: é como dizer aquela que realizou a trajetória 1 (2) foi a que saiu da posição $\mathbf{r_0}$ ($\mathbf{r'_0}$). Na mecânica clássica podemos "seguir" as partículas, passo a passo, e sempre saberemos qual é qual.

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

- E na mecânica quântica? Considere duas partículas idênticas colidindo (via potencial central $V(r)$, $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|$), conforme a figura.

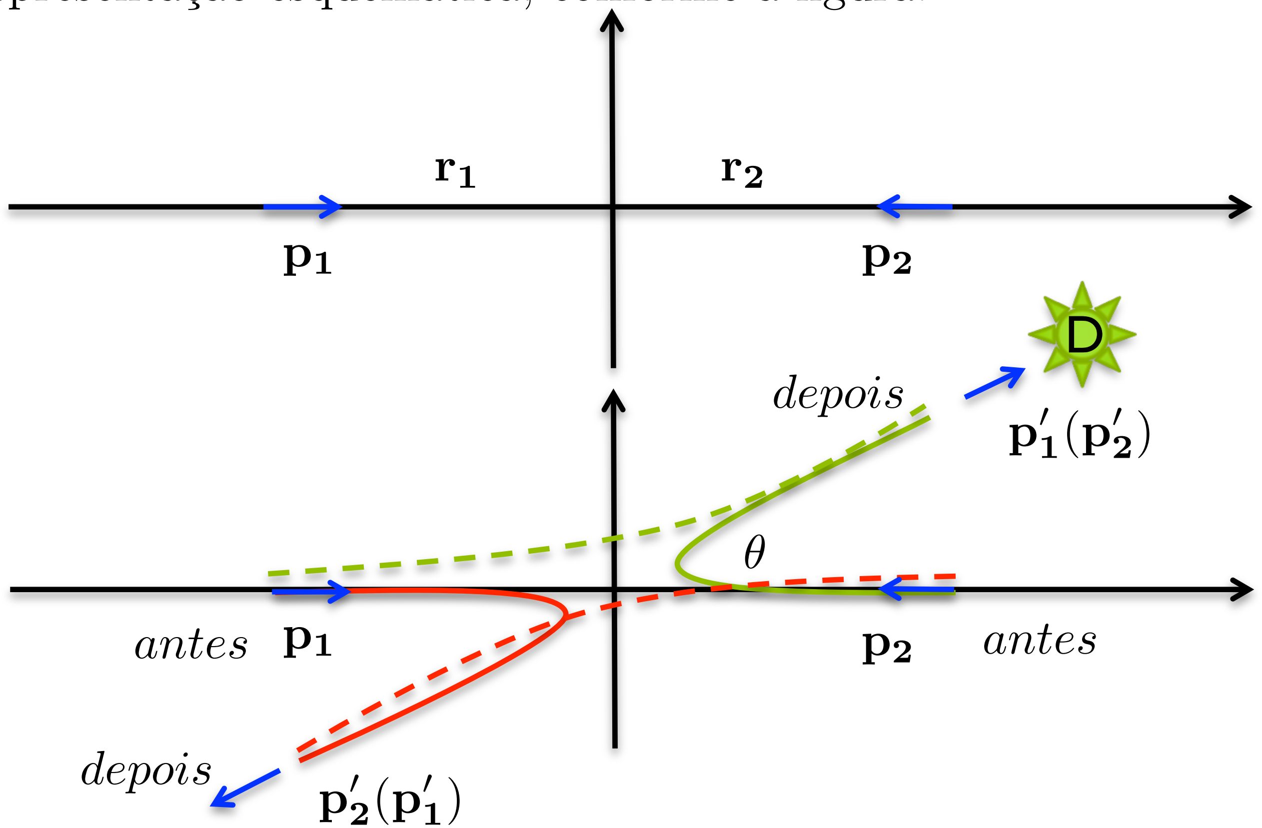


- Diferenças claras: (1) Partículas não tem trajetórias; (2) Pacotes separados em $t' = t_0$ podem estar misturados em $t' = t$. Como saber qual é qual?
- Qual das duas você estaria detectando em D? Note possíveis trajetórias (curvas cheias e pontilhadas).

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

- Faça uma medida em D (a outra deve estar andando em direção oposta por conservação de momento).

  Representação esquemática, conforme a figura.



- Duas situações clássicas distintas (trajetórias pontilhadas e cheias) estão associadas à um único estado físico (a quântica mistura essas situações).

  É impossível imaginar uma experiência mais completa que pudesse distinguir as duas partículas. Origem da degenerescência de troca.

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Degenerescência de troca

- Um outro exemplo de degenerescência de troca: sistema de duas partículas idênticas, ambas com spin 1/2.
  - Suponha que você saiba que a componente de spin total ao longo do eixo z é nula. Isso implica que uma tem componente de spin $+1/2\hbar$ e a outra tem $-1/2\hbar$ ao longo do eixo z.
- Se considerarmos que $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ são as observáveis associadas à cada partícula, a base ortonormal de auto-kets de S_{1z} e S_{2z} seria $\{|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle\}$, com $\epsilon_1 = \pm$ e $\epsilon_2 = \pm$, onde $\begin{cases} S_{1z}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = \epsilon_1 \frac{\hbar}{2}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle \\ S_{2z}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = \epsilon_2 \frac{\hbar}{2}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle \end{cases}$
- Se pensássemos classicamente, dois estados possíveis poderiam descrever a situação de spin total zero ao longo do eixo z $\begin{cases} |+,-\rangle \\ |-,+\rangle \end{cases}$

  Considere o caso $\underbrace{|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}}$
- O princípio de superposição diz que qualquer combinação $\alpha|+,-\rangle + \beta|-,+\rangle$ com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, pode representar o mesmo estado físico (um spin para cima e outro spin para baixo). Isso é chamado degenerescência de troca.
- A combinação arbitrária é um problema: o estado não é único. Para perceber isso, meça $S_x = S_{1x} + S_{2x}$ e veja o que obteria?

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Degenerescência de troca

- Suponha que procuramos a probabilidade de encontrar ambas as partículas apontando para a direção $+$ ao longo de x. O estado associado à esta medida é $|+,+\rangle_x = |+\rangle_x \otimes |+\rangle_x$, definido de forma única (a menos de uma fase global). Conforme visto em aulas anteriores (capítulos IV e X)

$$|+,+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|\epsilon_1=+\rangle + |\epsilon_1=-\rangle\Big] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|\epsilon_2=+\rangle + |\epsilon_2=-\rangle\Big],$$ ou seja,

$$|+,+\rangle_x = \frac{1}{2}\Big[|+,+\rangle + |-,+\rangle + |+,-\rangle + |-,-\rangle\Big],$$ o que permite calcular

$$\mathcal{P} = \Big|\,{}_x\langle +,+|\Big[\alpha|+,-\rangle + \beta|-,+\rangle\Big|^2 = \Big|\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\Big|^2 \leftarrow$$ (faça em casa).

- Esse resultado depende de α e β. Precisamos encontrar α e β que possam representar o estado físico de forma única. A degenerescência de troca precisa ser removida.

- Quando aprendemos a somar momento angular (capítulo X, aula 9), achamos quatro estados ($|S,m_S\rangle$) associados a duas partículas de spin 1/2.

Obtivemos
$$\begin{cases} |1,+1\rangle = |++\rangle \\ |1,-1\rangle = |--\rangle \\ |1,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |0,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{O que isso tem a ver com} \\ \text{a solução de nosso} \\ \text{problema?} \end{cases}$$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Degenerescência de troca

- Antes de explorar isso, é preciso generalizar: **Sistema de 3 partículas.** Suponha $\mathcal{E}(1), \mathcal{E}(2),$ e $\mathcal{E}(3),$ espaços de estados de uma partícula. Podemos construir o espaço do sistema de 3 partículas $\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{E}(3)$.
- Suponha agora $B(1),$ inicialmente definida em $\mathcal{E}(1)$ (para facilitar, considere ela por si só um CCOC).
- Como 1, 2 e 3 são idênticas, os operadores $B(2)$ e $B(3)$ também existem e formam um CCOC em $\mathcal{E}(2),$ e $\mathcal{E}(3)$.
- Os 3 operadores têm o mesmo espectro $\{b_n; n = 1, 2...\}$ e o produto tensorial nos fornece o espaço: $\{|1\!:\!b_i; 2\!:\!b_j; 3\!:\!b_k\rangle; i, j, k = 1, 2, ...\}$, auto-kets de $B(1)$, $B(2)$ e $B(3)$ com auto-valores b_i, b_j e $b_k,$ respectivamente.
- Uma vez que as partículas são idênticas, esta estória de medir B de 1, 2 ou 3 não vale. O que medimos é B de uma das partículas, mas não sabemos de qual delas. Assim após as medidas, b_n, b_p e b_q o sistema pode estar em $\forall$ dos estados físicos: $\begin{cases} |1\!:\!b_n; 2\!:\!b_p; 3\!:\!b_q\rangle; |1\!:\!b_q; 2\!:\!b_n; 3\!:\!b_p\rangle; |1\!:\!b_p; 2\!:\!b_q; 3\!:\!b_n\rangle \\ |1\!:\!b_n; 2\!:\!b_q; 3\!:\!b_p\rangle; |1\!:\!b_q; 2\!:\!b_p; 3\!:\!b_n\rangle; |1\!:\!b_p; 2\!:\!b_n; 3\!:\!b_q\rangle \end{cases}$
- Assim, uma medida completa (envolvendo todas as partículas) não permite determinar um único ket do estado do sistema.

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Operadores de Permutação

- Considere um sistema de duas partículas (distintas) descritas por $\begin{cases} \{|u_i\rangle\} \to \mathcal{E}(1); \\ \{|u_j\rangle\} \to \mathcal{E}(2), \end{cases}$

  gerando o espaço $\{|1:u_i;2:u_j\rangle\}$ de $\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2)$.

  - Note que $|2:u_j;1:u_i\rangle = |1:u_i;2:u_j\rangle$, pois $\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{E}(1) = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2)$,
  - mas, $|1:u_j;2:u_i\rangle \neq |1:u_i;2:u_j\rangle$, se $i \neq j$. De fato, $\langle 1:u_i;2:u_j|1:u_j;2:u_i\rangle = \delta_{ij}$

- O operador de permutação P_{21} tem a seguinte definição:

$$\boxed{P_{21}|1:u_i;2:u_j\rangle = |2:u_i;1:u_j\rangle = |1:u_j;2:u_i\rangle}$$

  - Como exemplo, suponha a base de auto-estados de $\mathbf{R}$ e S_z. Neste caso:

$$P_{21}|1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle = |1:\mathbf{r}',\epsilon';2:\mathbf{r},\epsilon\rangle.$$

- Como seria um ket, $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$ escrito na base $\{|1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle\}$?

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_{\epsilon,\epsilon'} \int d^3r d^3r' |1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle \underbrace{\langle 1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'|\psi\rangle}_{\psi_{\epsilon\epsilon'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')} \text{ e } \therefore$$

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{\epsilon,\epsilon'} \int d^3r d^3r' \psi_{\epsilon\epsilon'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle}$$

Instituto de Física Gleb Wataghin

MAPLima

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Operadores de Permutação

Que tal aplicarmos P_{21} em $|\psi\rangle$ da caixa roxa?

$$P_{21}|\psi\rangle=\sum_{\epsilon,\epsilon'}\int d^3r d^3r' \psi_{\epsilon\epsilon'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')P_{21}|1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle=\sum_{\epsilon,\epsilon'}\int d^3r d^3r' \psi_{\epsilon\epsilon'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|1:\mathbf{r}',\epsilon';2:\mathbf{r},\epsilon\rangle$$

Já que integramos em $\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ no espaço todo e somamos sobre todos os $\epsilon(\epsilon')$, podemos trocar as variáveis, $\mathbf{r}\leftrightarrow\mathbf{r}', \epsilon\leftrightarrow\epsilon'$, e escrever:

$$\boxed{P_{21}|\psi\rangle=\sum_{\epsilon,\epsilon'}\int d^3r d^3r' \psi_{\epsilon'\epsilon}(\mathbf{r}',\mathbf{r})|1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle}$$

Se chamarmos $P_{21}|\psi\rangle=|\psi'\rangle=\underbrace{\sum_{\epsilon,\epsilon'}\int d^3r d^3r' \psi'_{\epsilon\epsilon'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle}$,

conforme definimos $|\psi\rangle=\sum_{\epsilon,\epsilon'}\int d^3r d^3r' \psi_{\epsilon\epsilon'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|1:\mathbf{r},\epsilon;2:\mathbf{r}',\epsilon'\rangle$

temos que

$$\boxed{\psi'_{\epsilon\epsilon'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\psi_{\epsilon'\epsilon}(\mathbf{r}',\mathbf{r}),}$$

por comparação direta com a equação da caixa verde.

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Operadores de Permutação

- Propriedades de P_{21}
  - $(P_{21})^2 = 1 \Rightarrow P_{21}$ é o próprio inverso (aplicação direta da definição).
  - $P_{21}^\dagger = P_{21} \Rightarrow P_{21}$ é Hermiteano.

  Para mostrar que é Hermiteano, considere:

  $\langle 1\!:\!u_{i'};2\!:\!u_{j'}|P_{21}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j\rangle = \langle 1\!:\!u_{i'};2\!:\!u_{j'}|1\!:\!u_j;2\!:\!u_i\rangle = \delta_{i'j}\delta_{j'i}$ e compare com

  $\langle 1\!:\!u_{i'};2\!:\!u_{j'}|P_{21}^\dagger|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j\rangle = \langle 1\!:\!u_i;2\!:\!u_j|P_{21}|1\!:\!u_{i'};2\!:\!u_{j'}\rangle^\star = \delta^\star_{ji'}\delta^\star_{ij'} = \delta_{ji'}\delta_{ij'}$

- Kets simétricos e anti-simétricos (definições).

$$\text{Se}\begin{cases} P_{21}|\psi_S\rangle = +|\psi_S\rangle \rightarrow |\psi_S\rangle \text{ é simétrico;} \\ P_{21}|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle \rightarrow |\psi_A\rangle \text{ é anti-simétrico.} \end{cases}$$

- Note que como P_{21} é Hermiteano, podemos procurar os seus auto-valores e auto-vetores, isto é $P_{21}|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle$. Aplique P_{21} nesta equação e obtenha: $P_{21}^2|\psi_\lambda\rangle = \lambda P_{21}|\psi_\lambda\rangle = \lambda^2|\psi_\lambda\rangle$. Lembrando que $P_{21}^2 = 1$ e que λ é real $\Rightarrow \lambda = \pm 1$. Podemos concluir que $|\psi_S\rangle$ e $|\psi_A\rangle$ são auto-kets de P_{21} com auto-valores 1 e -1, respectivamente.

- Considere dois operadores $\begin{cases} S = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + P_{21}) \\ A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - P_{21}) \end{cases} \Rightarrow S + A = \mathbb{1}$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Operadores de Permutação

- Quanto vale S^2 e A^2?

- Como $\begin{cases} S = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + P_{21}) \rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + P_{21})(\mathbb{1} + P_{21}) = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + \underbrace{P_{21}^2}_{\mathbb{1}} + 2P_{21}) = S \\ A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - P_{21}) \rightarrow A^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{1} - P_{21})(\mathbb{1} - P_{21}) = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + \underbrace{P_{21}^2}_{\mathbb{1}} - 2P_{21}) = A \end{cases}$

- Note que $SA = AS = \dfrac{1}{2}(\mathbb{1} \pm P_{21})\dfrac{1}{2}(\mathbb{1} \mp P_{21}) = \dfrac{1}{4}(\mathbb{1} - P_{21}^2) = 0.$
- Como $A + S = \mathbb{1} \rightarrow A$ e S são espaços complementares.
- Tome um $|\psi\rangle$ arbitrário e construa (segundo as definições acima) $\Rightarrow \begin{cases} S|\psi\rangle \\ A|\psi\rangle \end{cases}$
- Observe que:
  - $P_{21}S|\psi\rangle = P_{21}\dfrac{1}{2}(\mathbb{1} + P_{21})|\psi\rangle = S|\psi\rangle \Rightarrow S|\psi\rangle$ é auto-estado de P_{21} com autovalor 1. S é um simetrizador.
  - $P_{21}A|\psi\rangle = P_{21}\dfrac{1}{2}(\mathbb{1} - P_{21})|\psi\rangle = -A|\psi\rangle \Rightarrow A|\psi\rangle$ é auto-estado de P_{21} com autovalor -1. A é um anti-simetrizador.

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Operadores de Permutação

- No espaço de duas partículas, um estado arbitrário sempre pode ser escrito como uma combinação de kets simétricos com kets anti-simétricos. Esse é o significado de $A + S = \mathbb{1}$, isto é para $\forall|\psi\rangle$, temos $|\psi\rangle = A|\psi\rangle + S|\psi\rangle$
- Transformação de observáveis por permutação

  Considere $B(1)$ uma observável que atua em $\mathcal{E}(1)$ e que pode ser extendido por $B(1) \otimes \mathbb{1}(2)$ para atuar em $\mathcal{E}$, conforme vimos em F689.

  - Observe que:

$$P_{21}B(1)P_{21}^{\dagger}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j\rangle = P_{21}B(1)|1\!:\!u_j;2\!:\!u_i\rangle = b_j P_{21}|1\!:\!u_j;2\!:\!u_i\rangle = \underbrace{b_j|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j\rangle}_{B(2)|1:u_i;2:u_j\rangle}$$

  Como isso vale para todos os kets de uma base completa, podemos dizer que $P_{21}B(1)P_{21}^{\dagger}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j\rangle = B(2)|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j\rangle$, implica em $P_{21}B(1)P_{21}^{\dagger} = B(2)$.

  - De forma semelhante, obteríamos $P_{21}B(2)P_{21}^{\dagger} = B(1)$ (faça em casa).

- De um modo geral (para observáveis de 2 partículas) $P_{21}\mathcal{O}(1,2)P_{21}^{\dagger} = \mathcal{O}(2,1)$.
- Uma observável, $\mathcal{O}_S(1,2)$ é dita simétrica, se $\mathcal{O}_S(1,2) = \mathcal{O}_S(2,1)$.
- Note que neste caso $P_{21}\mathcal{O}_S(1,2) = \mathcal{O}_S(1,2)P_{2,1}$, ou seja, observáveis simétricas comutam com o operador permutação.