Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Operadores de Permutação - Sistema de N partículas

- Ampliando o número de partículas idênticas. Caso $N=3$, cujo espaço é definido por: $\mathcal{E}=\{|1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle\}$
  - Quantos operadores de permutação conseguimos fazer, considerando a definição: $P_{npq}|1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle \equiv |n:u_i;p:u_j;q:u_k\rangle$? Que tal? $\begin{cases} P_{123}, P_{312}, P_{231}, \\ P_{132}, P_{213}, P_{321}. \end{cases}$
  - *Exemplo 1:* $P_{231}|1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle \equiv |2:u_i;3:u_j;1:u_k\rangle = |1:u_k;2:u_i;3:u_j\rangle$.
  - *Exemplo 2:* $P_{123}|1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle \equiv |1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle \therefore P_{123} = \mathbb{1}$.
  - *Exemplo 3:* O produto de duas permutações é uma permutação. Testaremos o caso: $P_{312}P_{132}=P_{321}$. Note que P_{132} troca a segunda com a terceira partícula. Se fizermos isso em P_{312}, obtemos P_{321}. Ou se preferir, aplique a definição e obtenha

$$\begin{aligned} P_{312}P_{132}|1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle &= P_{312}|1:u_i;3:u_j;2:u_k\rangle = P_{312}|1:u_i;2:u_k;3:u_j\rangle = \\ &= |3:u_i;1:u_k;2:u_j\rangle = |3:u_i;2:u_j;1:u_k\rangle = \\ &= P_{321}|1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle \end{aligned}$$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Operadores de Permutação - Sistema de 3 partículas

- Cada operador de permutação tem um inverso que também é um operador de

$$\text{permutação}\begin{cases}P_{123}^{-1}=P_{123}\\P_{132}^{-1}=P_{132}\\P_{213}^{-1}=P_{213}\\P_{321}^{-1}=P_{321}\\P_{312}^{-1}=P_{231}\\P_{231}^{-1}=P_{312}\end{cases}$$

$P_{132}, P_{213}, P_{321} \Longrightarrow$ Aqueles que permutam só um par, o inverso é igual à eles mesmos.

- Note que os operadores de permutação não comutam entre si.

$$\circ\ \text{Exemplo: } [P_{132},P_{312}]\begin{cases}P_{132}P_{312}=P_{213}\rightarrow\begin{cases}\text{Note que } P_{312} \text{ é uma rotação}\\\text{de índices. Faça isso no } P_{132};\end{cases}\\[2ex]P_{312}P_{132}=P_{321}\rightarrow\begin{cases}\text{Note que } P_{132} \text{ é uma troca das}\\\text{partículas 2 e 3. Faça isso no } P_{312}.\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{Como}\begin{cases}P_{213}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j;3\!:\!u_k\rangle=|2\!:\!u_i;1\!:\!u_j;3\!:\!u_k\rangle=|1\!:\!u_j;2\!:\!u_i;3\!:\!u_k\rangle,\forall i,j,k;\\P_{321}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j;3\!:\!u_k\rangle=|3\!:\!u_i;2\!:\!u_j;1\!:\!u_k\rangle=|1\!:\!u_k;2\!:\!u_j;3\!:\!u_i\rangle,\forall i,j,k.\end{cases}$$

Isso permite concluir que $[P_{132},P_{312}]\neq 0$. Faça outros em casa.

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Transposições e paridade de operador de permutação

- *Definição:* Transposição é uma permutação envolvendo apenas duas partículas.
  - Transposições são Hermiteanas e elas são suas próprias inversas (ver aula passada sobre o P_{21}). Assim temos $T^\dagger = T^{-1} \therefore T^\dagger T = 1 \therefore$ operadores unitários.
  - Note que $T^2 = \mathbb{1}$.
- Qualquer operador de permutação pode ser escrito como um produto de operadores de transposição.

  Exemplo: $P_{312} = P_{132}P_{213} \begin{cases} P_{132} \to \text{transposição } 2 \leftrightarrow 3 \\ P_{213} \to \text{transposição } 1 \leftrightarrow 2 \end{cases}$

  Para obter esse resultado use relação obtida no slide anterior, $P_{132}P_{312} = P_{213}$, multiplicada por P_{132} pela esquerda, isto é $P_{132}P_{132}P_{312} = P_{132}P_{213}$. Usando que P_{132} é uma transposição, obtemos $P_{312} = P_{132}P_{213}$.
  - Note que esses produtos não são definidos de forma única. Se usássemos a outra relação obtida no slide anterior, $P_{312}P_{132} = P_{321}$, multiplicada por P_{132} pela direita, isto é, $P_{312}P_{132}P_{132} = P_{321}P_{132}$. Usando que P_{132} também é uma transposição, $P_{132}P_{132} = \mathbb{1}$, obteríamos $P_{312} = P_{321}P_{132}$.
  - Outra possibilidade seria $P_{312} = P_{213}P_{321} \begin{cases} \text{Note que } P_{321} \text{ troca 1 e 3. Faça isso} \\ \text{em } P_{213} \text{ para obter } P_{312}. \end{cases}$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Transposições e paridade de operador de permutação

- Será que tem mais? Sim basta multiplicar qualquer uma das expressões por transposições ao quadrado,

$$\text{isto é } P_{312} = \begin{cases} P_{132}P_{213} = P_{132}P_{213}P_{132}^2 = P_{132}P_{213}P_{132}^2P_{321}^2 = ... \\ P_{321}P_{132} = P_{132}^2P_{321}P_{132} = P_{132}^2P_{321}P_{132}P_{321}^2 = ... \\ P_{213}P_{321} = P_{213}P_{321}P_{132}^2 = P_{132}^2P_{213}P_{321}P_{132}^2 = ... \end{cases}$$

- O que elas têm em comum? A paridade! O número de transposições que representam P_{312} parece ser sempre par.

- Isso é geral $\begin{cases} \text{paridade par} \Rightarrow \begin{cases} P_{123} \\ P_{312} \\ P_{231} \end{cases} \\ \text{paridade impar} \Rightarrow \begin{cases} P_{132} \\ P_{213} \\ P_{321} \end{cases} \end{cases}$

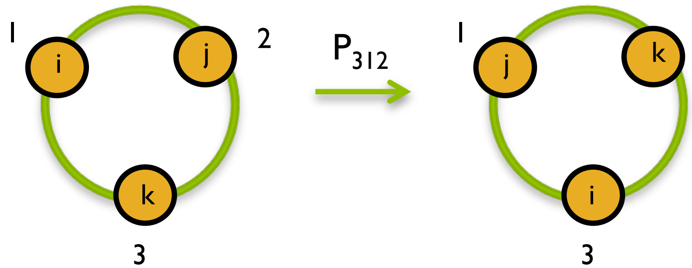
- Para qualquer que seja o número (N) de partículas do sistema, o número de permutações pares é sempre igual ao número de permutações ímpares.
- Os operadores de permutação são unitários, uma vez que transposições são unitárias e produto de operadores unitários é unitário. Considere: $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger = AA^\dagger = 1$, uma vez que $BB^\dagger = 1$ e $AA^\dagger = 1$.

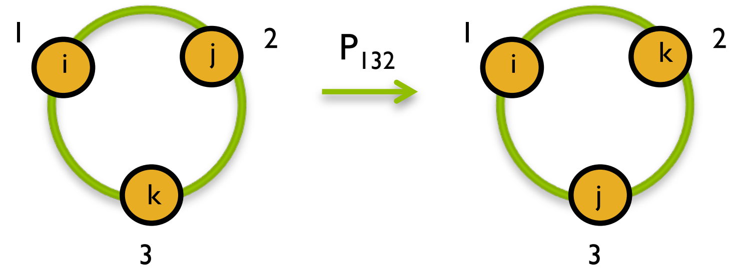
Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Transposições e paridade de operador de permutação

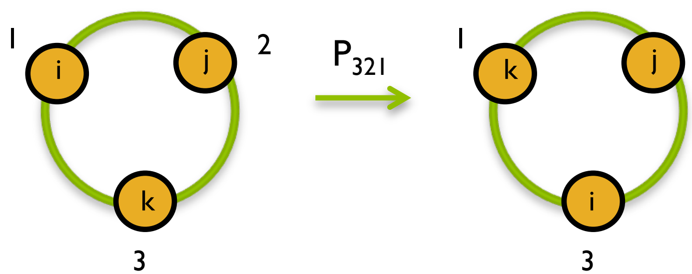
- Operadores de permutação não são necessariamente Hermiteanos.

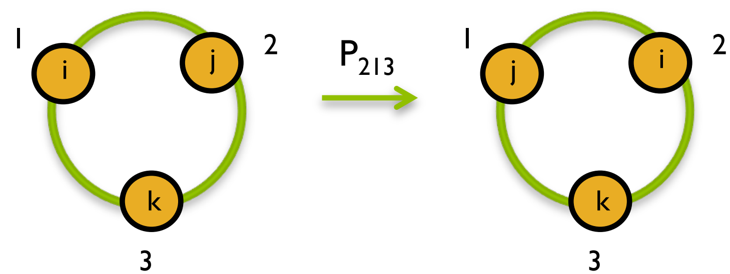
  Para ver isso, suponha A e B operadores de transposição. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$, que pode não ser AB, pois transposições podem não comutar (veja slide 2).
- Considere esses diagramas para facilitar à aplicação de permutações em kets:





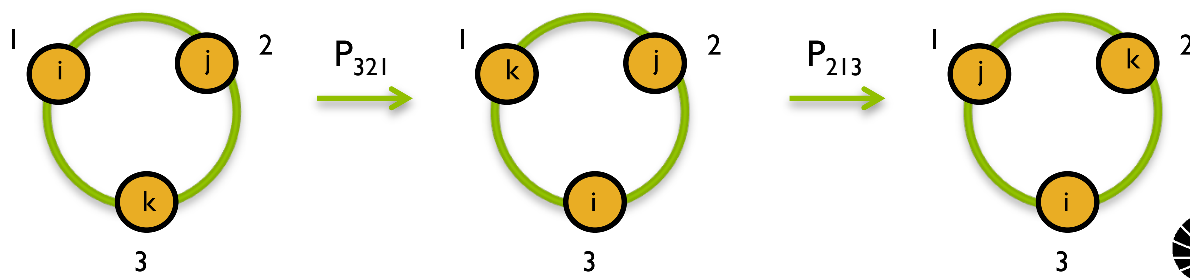
$$P_{312}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j;3\!:\!u_k\rangle = |1\!:\!u_j;2\!:\!u_k;3\!:\!u_i\rangle;\ P_{132}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j;3\!:\!u_k\rangle = |1\!:\!u_i;2\!:\!u_k;3\!:\!u_j\rangle$$





$$P_{321}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j;3\!:\!u_k\rangle = |1\!:\!u_k;2\!:\!u_j;3\!:\!u_i\rangle;\ P_{213}|1\!:\!u_i;2\!:\!u_j;3\!:\!u_k\rangle = |1\!:\!u_j;2\!:\!u_i;3\!:\!u_k\rangle$$

$P_{213}P_{321}$



Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

Kets simétricos e anti-simétricos mediante transposição

- O operador adjunto de uma dada permutação tem a mesma paridade que a permutação. Isso porque o adjunto é feito pelas mesmas transposicões, apenas tomadas em ordem oposta.

$$(\underbrace{ABCD}_{4 \text{ transposições}})^\dagger = D^\dagger C^\dagger B^\dagger A^\dagger = \underbrace{DCBA}_{4 \text{ transposições}}$$

⋆ Kets completamente simétricos ou anti-simétricos ⋆

(*Definiremos 2 operadores chamados de*: Simetrizador e Anti-simetrizador.)

- Uma vez que operadores de permutação não comutam entre si para $N > 2$, não é possível construir uma base formada pelos autovetores comuns desses operadores. Entretanto existem certos kets que são autokets de todos os operadores de permutação. Vamos estuda-los.

∘ *Definição:* $P_\alpha \equiv$ Operador de permutação associado ao sistema de N partículas.

$$\text{Se} \begin{cases} P_\alpha|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle, \ \forall\ \alpha \Rightarrow |\psi_S\rangle \text{ é dito completamente simétrico.} \\ \\ P_\alpha|\psi_A\rangle = \epsilon_\alpha|\psi_A\rangle, \forall\ \alpha, \ \text{com} \begin{cases} \epsilon_\alpha = +1, \ \text{se } P_\alpha \text{ é par} \\ \epsilon_\alpha = -1, \ \text{se } P_\alpha \text{ é ímpar} \end{cases} (\#\text{ de transposições}), \\ \Rightarrow |\psi_A\rangle \text{ é dito completamente anti-simétrico.} \end{cases}$$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

simetrizadores e anti-simetrizadores

- Chamaremos de $\mathcal{E}_S$ o conjunto dos kets completamente simétricos. Ele constitui um subespaço do espaço de estado $\mathcal{E}$.
- Chamaremos de $\mathcal{E}_A$ o conjunto dos kets completamente anti-simétricos. Ele também constitui um subespaço do espaço de estado $\mathcal{E}$.
- Considere os seguintes operadores:

$$\boxed{S = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha} P_{\alpha},}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} P_{\alpha},}$$

onde, as somas são feitas sobre todas as $N!$ permutações (todas possíveis) dos primeiros N inteiros e ϵ_{α} segue a definição dada.

- Nestas condições, veremos que $\begin{cases} S \text{ é um simetrizador e} \\ A \text{ é um anti-simetrizador.} \end{cases}$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

- S e A são Hermiteanos, pois a soma em α é completa e o produto de transposições invertidas é uma das componentes da soma. Lembre que $(S)^\dagger = \frac{1}{N!}\sum_\alpha P_\alpha^\dagger$ e que $P_\alpha^\dagger$ pode não ser o próprio P_α, mas como ele é um produto de transposições, ele também será uma permutação. Como a soma em α varre todas as permutações possíveis, $P_\alpha^\dagger$ será uma delas. Assim, poderemos escrever

$$(S)^\dagger = \frac{1}{N!}\sum_\alpha P_\alpha^\dagger = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha'} P_{\alpha'} = \frac{1}{N!}\sum_\alpha P_\alpha = S.$$

- ○ Se quiser, use o fato que $P_\alpha^\dagger = P_\alpha^{-1}$. Assim o conjunto de todas as permutações inversas é tão bom quanto as diretas.
- ○ Na linguagem de teoria de grupos, se os $P_\alpha' s$ formam um grupo, os $P_\alpha^{\dagger'} s$ também formam.
- ○ Raciocínio similar mostra que

$$(A)^\dagger = \frac{1}{N!}\sum_\alpha \epsilon_\alpha P_\alpha^\dagger = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha'} \epsilon_{\alpha'} P_{\alpha'} = \frac{1}{N!}\sum_\alpha \epsilon_\alpha P_\alpha = A.$$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

simetrizadores e anti-simetrizadores

- Se P_{α_0} é uma permutação arbitrária, podemos escrever

$$P_{\alpha_0} S = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \underbrace{P_{\alpha_0} P_\alpha} = \frac{1}{N!} \sum_{\beta} P_\beta = S$$

↑ também é uma permutação

- Agora, se aplicarmos P_{α_0} em A, temos

$$P_{\alpha_0} A = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha_0} \epsilon_\alpha P_\alpha = \frac{1}{N!} \epsilon_{\alpha_0} \sum_{\alpha} \underbrace{\epsilon_{\alpha_0} P_{\alpha_0} \epsilon_\alpha P_\alpha} = \frac{1}{N!} \epsilon_{\alpha_0} \sum_{\beta} \epsilon_\beta P_\beta = \epsilon_{\alpha_0} A$$

usei que $\epsilon_{\alpha_0}^2 = 1.$ ↑ também é uma permutação

- De forma similar, pode-se mostrar $\begin{cases} S P_{\alpha_0} = S \\ A P_{\alpha_0} = \epsilon_{\alpha_0} A \end{cases}$

- Note também que $S^2 = SS = \frac{1}{N!} \sum_{\beta} \underbrace{P_\beta S}_{S} = \frac{1}{N!} \underbrace{\sum_{\beta}}_{N!} S = S$

- De forma similar, $A^2 = AA = A \frac{1}{N!} \sum_{\beta} \epsilon_\beta P_\beta = \frac{1}{N!} \sum_{\beta} \epsilon_\beta^2 A = \frac{1}{N!} \sum_{\beta} A = A$

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

simetrizadores e anti-simetrizadores

- Temos ainda que $AS = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha}\epsilon_\alpha P_\alpha S = \frac{1}{N!}\sum_{\alpha}\epsilon_\alpha S = \frac{S}{N!}\sum_{\alpha}\epsilon_\alpha = 0$

metade é +
metade é -

- Note que como $\begin{cases} S^2 = S \\ A^2 = A \\ SA = AS = 0 \end{cases} \Rightarrow$ S e A são projetores.
- Note que, se aplicarmos uma permutação arbitrária em $S|\psi\rangle$, obtemos $S|\psi\rangle$, isto é $P_{\alpha_0}S|\psi\rangle = S|\psi\rangle$ (ver slide anterior). Isso significa que $S|\psi\rangle$ é totalmente simétrico.
- Note que, se aplicarmos uma permutação arbitrária em $A|\psi\rangle$, obtemos $\epsilon_{\alpha_0}A|\psi\rangle$, isto é $P_{\alpha_0}A|\psi\rangle = \epsilon_{\alpha_0}A|\psi\rangle$ (ver slide anterior). Isso significa que $A|\psi\rangle$ é totalmente anti-simétrico.

Comentários

- O ket totalmente simétrico, construído pela ação de S em $P_\alpha|\psi\rangle$, é o mesmo que se obtém a partir da ação de S em $|\psi\rangle$. Isso vale para $\forall P_\alpha$ e vem da relação $SP_\alpha = S$, aplicada em $|\psi\rangle$, isso é $SP_\alpha|\psi\rangle = S|\psi\rangle$
- Analogamente, para os kets anti-simétricos, vale $AP_\alpha|\psi\rangle = \epsilon_\alpha A|\psi\rangle$ (eles diferem no máximo por um sinal).

Sistema de Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

simetrizadores e anti-simetrizadores

Comentários (continuação)

- Para o número de partículas $N > 2$, a soma dos projetores $S + A$ não é $\mathbb{1}$. É o mesmo que dizer que, nesse caso, não é possível escrever um ket arbitrário pela soma de um ket simétrico com um anti-simétrico.

  Exemplo: $N = 3$

$$S + A = \frac{1}{6}\Big(P_{123} + P_{132} + P_{213} + P_{231} + P_{312} + P_{321}\Big) +$$
$$+ \frac{1}{6}\Big(P_{123} - P_{132} - P_{213} + P_{231} + P_{312} - P_{321}\Big) =$$
$$= \frac{1}{3}\Big(P_{123} + P_{231} + P_{312}\Big) \neq \mathbb{1}$$

- *Transformação de Observáveis Simétricas por Permutação.*

  Vale aqui o mesmo argumento dado para o caso de 2 partículas, lembra?

$$P_{21}\mathcal{O}(1,2)P_{21}^{\dagger} = \mathcal{O}(2,1) = \mathcal{O}(1,2),$$

o que permitiu concluir que $P_{21}\mathcal{O}(1,2) = \mathcal{O}(1,2)P_{21}$.

Comece com $P_\alpha \mathcal{O}(1,2,...,N)P_\alpha^{\dagger}$, e escreva P_α como um produto de transposições. Aplique sucessivamente o argumento do caso de duas partículas para concluir

$$\boxed{P_\alpha \mathcal{O}(1,2,...,N) = \mathcal{O}(1,2,...,N)P_\alpha}$$