Conexão entre o formalismo de operador densidade e a Mecânica Estatística

A proposta desta aula é estudar a quantidade: $\sigma = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho)$, que diferencia claramente as duas situações:

$$\begin{cases} \text{Ensemble Completamente Aleatório (ECA)} \\ \text{e} \\ \text{Ensemble Polarizado (EP)} \end{cases}$$

e ajuda a fazer uma conexão deste formalismo de operador densidade com a Mecânica Estatística usual. Como fica σ na base que diagonaliza ρ? Que tal:

$$\sigma = -\sum_k \rho_{kk}^{(\mathrm{diag})} \ln \rho_{kk}^{(\mathrm{diag})}$$

lousa

Note que, como $0 \leq \rho_{kk} \leq 1 \rightarrow \ln \rho_{kk}^{(\mathrm{diag})} < 0$ e $\therefore\ \sigma > 0$.

Assim, temos:
$$\begin{cases} \text{p/ ECA } \sigma = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{\ln N}{N} \sum_1^N 1 = \ln N \\ \\ \text{p/ EP } \sigma = 0, \text{ pois } \rho_{kk} = 0 \text{ ou } \ln \rho_{kk} = 0 \end{cases}$$

Primeira conexão: valor de σ está ligado à desordem

$$\begin{cases} \text{ECA: as partículas em estados igualmente prováveis} \\ \qquad \text{(muito desordenado)} \\ \text{EP: as partículas em um mesmo estado} \\ \qquad \text{(muito ordenado)} \end{cases}$$

Mecânica Estatística Quântica

É possível mostrar que $\ln N$ é de fato, o maior valor possível de σ, uma vez imposta a condição (vínculo): $\sum_k \rho_{kk} = 1$

Nasce a segunda conexão: $\underbrace{S}_{\text{entropia}} \equiv \underbrace{k}_{\text{constante de Boltzmann}} \sigma$

Veremos que ρ pode ser obtido para um sistema em equilíbrio (onde $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

Das equações $\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \\ i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H] \end{cases}$ temos: $[\rho, H] = 0 \rightarrow$ autokets em comum.

Se a base de H diagonaliza $\rho \rightarrow \rho_{kk} =$ população fracional do autoestado de energia E_k. Isto é o mesmo que dizer que quando o ensemble está em equilíbrio, ele tem suas partículas distribuídas em autoestados de H. Para obter ρ para o sistema em equilíbrio, teremos como hipótese básica que: a natureza tende a maximizar σ(ou S), tendo como vínculo que o valor médio de energia tem um certo valor fixo. Assim faremos:

$\delta\sigma = 0$ com dois vínculos: $\begin{cases} \text{1) da energia } [H] = \ \mathrm{Tr}(\rho H) = U \ \text{(fixo)} \\ \text{2) da norma } \ \mathrm{Tr}(\rho) = 1 \end{cases}$

Mecânica Estatística Quântica

Maximizar com multiplicadores de Lagrange

$\alpha = \sigma + \beta\big(-[H] + U_{\text{fixo}}\big) + \gamma\big(-\operatorname{Tr}(\rho) + 1\big) \to \delta\alpha = 0.$

Isto nos leva à: $\delta\sigma - \beta\delta[H] - \gamma\delta\operatorname{Tr}(\rho) = 0$

$$\text{Mas}\begin{cases}\delta[H] = \delta(\sum_k \rho_{kk}E_k) = \sum_k \delta\rho_{kk}E_k \\ \\ \delta\operatorname{Tr}(\rho) = \sum_k \delta\rho_{kk} \\ \\ \delta\sigma = \delta(-\sum_k \rho_{kk}\ln\rho_{kk}) = -\sum_k \delta\rho_{kk}\ln\rho_{kk} - \sum_k \delta\rho_{kk}\end{cases}$$

Assim $\delta\alpha = \delta\sigma - \beta\delta[H] - \gamma\delta\operatorname{Tr}(\rho) = 0 \to -\sum\limits_k \delta\rho_{kk}\big(\ln\rho_{kk} + 1 + \beta E_k + \gamma\big) = 0.$

Para variações arbitrárias de $\delta\rho_{kk}$, só nos resta fazer: $\ln\rho_{kk} + 1 + \beta E_k + \gamma = 0,$ ou seja $\rho_{kk} = \exp\big(-\beta E_k - \gamma - 1\big)$. Mas $\sum\limits_k \rho_{kk} = 1$ e isso nos leva à

$$\sum_k \exp\big(-\beta E_k - \gamma - 1\big) = 1 \to \exp\big(\gamma + 1\big) = \sum_k \exp\big(-\beta E_k\big) \quad \text{e} \quad \therefore$$

$$\rho_{kk} = \frac{\exp\big(-\beta E_k\big)}{\sum_k \exp\big(-\beta E_k\big)} \text{ fração da população com energia } E_k.$$

Mecânica Estatística Quântica

Reconhecemos aqui a função de partição: $Z=\sum_k^N \exp\big(-\beta E_k\big)$. Note que podemos escrever $Z=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ e $\rho=\dfrac{e^{-\beta H}}{Z}$. Assim,

$$[A]=\frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A)}{Z}=\frac{\sum_k^N \langle A\rangle_k \exp\big(-\beta E_k\big)}{\sum_k^N \exp\big(-\beta E_k\big)}$$

$$U=\frac{\sum_k^N E_k \exp\big(-\beta E_k\big)}{\sum_k^N \exp\big(-\beta E_k\big)}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \qquad \text{com} \qquad \beta=\frac{1}{kT},$$

Identifique isso com auxílio da energia média de um ensemble de osciladores harmônicos, em comparação com a energia interna clássica, kT, esperada no limite clássico.

fórmula conhecida em Mecânica Estatística.

Observação interessante: Se tivéssemos calculado o extremo de σ, sem o vínculo de valor médio de energia fixo, teríamos encontrado $\rho_{kk}=\dfrac{1}{N}$ e σ correspondente igual à $\ln N$. Verifique isso. Esse resultado também pode ser obtido fazendo $\beta=0$ (o que equivale a fazer $T\to\infty$).

Um voluntário para discutir essa observação na próxima aula?

Momento Angular: Autovalores e Autoestados

Lembre que definimos as regras de comutação entre componentes de momento angular a partir de $\begin{cases} J_k \text{ é o gerador de rotações sobre o k-ésimo eixo} \\ \text{Rotações sobre eixos diferentes não comutam} \end{cases}$

Isto foi suficiente para definir que na mecânica quântica: $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$

A partir disso, definiremos o espectro possível de momento angular. Comece com:

$$J^2 \equiv J_x J_x + J_y J_y + J_z J_z \text{ e note que } [J^2, J_k] = 0, \text{ pois}$$

$$[J_x J_x + J_y J_y + J_z J_z, J_z] = J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y =$$
$$= J_x(-i\hbar J_y) + (-i\hbar J_y)J_x + J_y i\hbar J_x + i\hbar J_x J_y = 0$$

De forma semelhante, é possível obter: $[J^2, J_x] = 0$ e $[J^2, J_y] = 0$.

Consequência: Embora J^2 comute com todas as componentes, temos que escolher uma delas para diagonalizá-la simultaneamente com J^2. As três não seria possível, pois elas não comutam entre si.

Por convenção, escolhemos J_z $\begin{cases} J^2|a,b\rangle = a|a,b\rangle \\ J_z|a,b\rangle = b|a,b\rangle \end{cases}$

Para definir a e b usaremos operadores escada $J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y$

Momento Angular: Autovalores e Autoestados

$J_\pm$ satisfazem as seguintes relações de comutação:
$$\begin{cases} [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \overset{\text{relação útil}}{\Longrightarrow} J_+J_- = J_-J_+ + 2\hbar J_z & (*) \\ [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \overset{\text{importante}}{\Longrightarrow} \text{origem dos operadores escada} \\ [J^2, J_\pm] = 0 \overset{\text{importante}}{\Longrightarrow} \text{matriz de rotação bloco-diagonal} \end{cases}$$

Qual o significado físico de $J_\pm$? Para descobrir, considere

$$J_z(J_\pm|a,b\rangle) = \big([J_z, J_\pm] + J_\pm J_z\big)|a,b\rangle = (\pm\hbar J_\pm + J_\pm b)|a,b\rangle = (\pm\hbar + b)J_\pm|a,b\rangle$$

Ou seja, $J_\pm$ sobre $|a,b\rangle$ fornece um outro autoket de J_z, só que agora com autovalor $b\pm\hbar$. Esta propriedade faz com que os operadores $J_\pm$ sejam chamados de operadores escada.

Já vimos isso antes
$$\begin{cases} [N, a^\dagger] = a^\dagger \to N(a^\dagger|n\rangle) = (n+1)(a^\dagger|n\rangle) \\ [N, a] = -a \to N(a|n\rangle) = (n-1)(a|n\rangle) \\ [\mathbf{x}, \Im(d\mathbf{x}')] = d\mathbf{x}'\Im(d\mathbf{x}') \to \mathbf{x}(\Im(d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle) = (\mathbf{x}' + d\mathbf{x}')(\Im(d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle) \\ [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \to J_z(J_\pm|a,b\rangle) = (\pm\hbar + b)(J_\pm|a,b\rangle) \end{cases}$$

Autovalores de J^2 e J_z

Apesar do $J_\pm$ mudar um autoket de J_z para outro com autovalor alterado em $\pm\hbar$, isso não acontece para os autokets de J^2, pois

$$J^2 J_\pm|a,b\rangle = J_\pm J^2|a,b\rangle = aJ_\pm|a,b\rangle.$$

Isto não significa que o ket não mudou, apenas que continua sendo um autoket de J^2 com o mesmo autovalor (o ket mudou dentro do espaço degenerado).

Assim, concluímos que os $J_\pm|a,b\rangle$ são autokets simultâneos de J^2 e J_z com autovalores a e $b\pm\hbar$, respectivamente. Podemos escrever $J_\pm|a,b\rangle = c_\pm|a,b\pm\hbar\rangle$.

Para os autovalores, aplique J_+ em $|a,b\rangle$ n vezes $\begin{cases} \text{“}b\text{” será acrescido de } n\hbar \\ \text{“}a\text{” ficará constante} \end{cases}$

Será isso possível, uma vez que J_z é um pedaço de J^2? $(J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)$

Esperamos que $a \geq b^2$. Para provar isso, considere

$$J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = \frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+) \qquad (*)$$

Sabendo que $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$, tome $\begin{cases} |\alpha\rangle = J_+|a,b\rangle \to \langle a,b|J_+^\dagger J_+|a,b\rangle \geq 0. \\ |\alpha\rangle = J_+^\dagger|a,b\rangle \to \langle a,b|J_+J_+^\dagger|a,b\rangle \geq 0. \end{cases}$ Assim,

$$\langle a,b|J^2 - J_z^2|a,b\rangle = a - b^2 = \langle a,b|\frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)|a,b\rangle \geq 0 \text{ e } \therefore\ a \geq b^2.$$

Autovalores de J^2 e J_z

$a \geq b^2$ implica em $J_+|a, b_{\max}\rangle = 0$, onde $b_{\max}$ é o maior valor de b, que satisfaz a desigualdade. Se não for assim, o operador J_+ aplicado sobre $|a, b_{\max}\rangle$ cria um ket $|a, b_{\max}+1\rangle$ com $(b_{\max}+1)^2$ ultrapassando a. Assim, é possível escrever

$$J_-J_+|a, b_{\max}\rangle = 0 \to \begin{cases} (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|a, b_{\max}\rangle = 0 \\ \Downarrow \\ (a - b_{\max}^2 - b_{\max}\hbar)|a, b_{\max}\rangle = 0 \end{cases}$$

→ lousa

como $|a, b_{\max}\rangle \neq 0$,

$$\therefore \quad \boxed{a = b_{\max}(b_{\max}+\hbar)}$$

De forma similar $J_-|a, b_{\min}\rangle = 0$ $(a \geq b^2$ de novo, onde $|b_{\min}|$ é o limite).

$$J_+J_-|a, b_{\min}\rangle = 0 \to \begin{cases} (J^2 - J_z^2 + \hbar J_z)|a, b_{\min}\rangle = 0 \\ \Downarrow \\ (a - b_{\min}^2 + b_{\min}\hbar)|a, b_{\min}\rangle = 0 \end{cases}$$

→ lousa

como $|a, b_{\min}\rangle \neq 0$,

$$\therefore \quad \boxed{a = b_{\min}(b_{\min}-\hbar)}$$

Assim, $b_{\max}(b_{\max}+\hbar) = b_{\min}(b_{\min}-\hbar) \to b_{\max}^2 + \hbar b_{\max} - b_{\min}(b_{\min}-\hbar) = 0$

e finalmente $b_{\max} = \begin{cases} -b_{\min} \\ -\hbar + b_{\min} \text{ impossível, pois } b_{\max} \text{ é max.} \end{cases}$

Autovalores de J^2 e J_z

Do slide anterior concluímos $-b_{\max} \leq b \leq b_{\max}$.

Esperamos que $|a, b_{\max}\rangle$ possa ser obtido de $|a, b_{\min}\rangle$ a partir de um número finito de aplicações de J_+, ou seja $b_{\max} = b_{\min} + n\hbar$. Mas como $b_{\min} = -b_{\max}$,

$$\text{temos: } b_{\max} = \frac{n\hbar}{2} \text{ com } n \text{ inteiro.}$$

Com isso, definimos $j \equiv \dfrac{n}{2}$ (como n é inteiro, j pode ser inteiro ou semi-inteiro).

E assim, concluímos
$$\begin{cases} \text{o autovalor máximo de } J_z \text{ é } j\hbar \\ \\ a = b_{\max}(b_{\max} + \hbar) = j\hbar(\hbar j + \hbar) = \hbar^2 j(j+1) \\ \\ b \equiv m\hbar \begin{cases} \text{se } j \text{ é inteiro } m \text{ é inteiro.} \\ \text{se } j \text{ é semi-inteiro } m \text{ é semi-inteiro.} \end{cases} \\ \\ m = \underbrace{-j, -j+1, \ldots j-1, j}_{2j+1 \text{ estados}} \end{cases}$$

Usamos só regras de comutação para obter:
$$\begin{cases} J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle \\ J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle \end{cases} \quad \text{com } |a,b\rangle \equiv |j,m\rangle$$

Elementos de matriz de J^2, J_z, J_+ e J_-

Dos slides anteriores temos
$$\begin{cases} \langle j', m'|J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm} \\ \langle j', m'|J_z|j, m\rangle = m\hbar\delta_{j'j}\delta_{m'm} \\ \langle j, m|J_+^\dagger J_+|j, m\rangle = \langle j, m|J^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j, m\rangle = \\ \qquad = \hbar^2(j(j+1) - m^2 - m) \end{cases}$$

Mas $J_+|j, m\rangle = c^+_{jm}|j, m+1\rangle \Longrightarrow |c^+_{jm}|^2 = \hbar^2(j(j+1) - m^2 - m)$

$$\therefore \; |c^+_{jm}|^2 = \hbar^2(j-m)(j+m+1)$$

Se escolhermos c^+_{jm} positivo e real, temos:

$$J_+|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle$$

Analogamente, podemos obter:

$$J_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle$$

E assim: $\boxed{\langle j', m'|J_\pm|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\delta_{j'j}\delta_{m',m\pm 1}}$

Representações do Operador de Rotação

Sabendo calcular elementos de matriz de $J^2, J_z,$ e $J_\pm,$ estamos prontos para calcular: $\underbrace{\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)}_{\text{funções de Wigner}} = \langle j,m'|\exp\big(\dfrac{-i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)|j,m\rangle$

Note que tomamos $j'=j,$ pois o operador $D(R)=\exp\big(\dfrac{-i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)$ não conecta j' com $j,$ se $j'\neq j$. Isto porque $[J^2,\mathbf{J}.\mathbf{n}]=0$ e $\therefore$ $J^2D(R)|j,m\rangle = D(R)J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2D(R)|j,m\rangle$. Ou seja, se $|j,m\rangle$ é autoket de $J^2,$ $D(R)|j,m\rangle$ também é e com o mesmo autovalor (se $j'\neq j$ os autokets correspondentes são ortogonais e o elemento de matriz $D(R)$ entre j e j' é zero). Concluímos, então, que operadores de rotação não podem mudar valores de j. Suas representações matriciais são bloco-diagonais

$$\begin{array}{l} J=0 \longrightarrow \\[1em] J=1/2 \longrightarrow \\[2em] J=1 \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} \{\square\} & \mathrm{O} & & \\ \mathrm{O} & \left\{\begin{matrix}\square & \square\\ \square & \square\end{matrix}\right. & \mathrm{O} & \vdots \\ & \mathrm{O} & \left\{\begin{matrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{matrix}\right. & \vdots \end{pmatrix}$$

Matrizes de Rotação: tome um dos bloquinhos

As matrizes de rotação caracterizadas por j formam um grupo. Para verificar isso, note:

1) $\exists$ a identidade $\mathit{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \text{O} & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (2j+1)\times(2j+1)$

2) a inversa também é membro do grupo

$$\sum_m \mathcal{D}^j_{m'm}(R)\mathcal{D}^j_{mm''}(R^{-1}) = \sum_m \langle jm'|\exp\big(\frac{-i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)|jm\rangle\langle jm|\exp\big(\frac{i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)|jm''\rangle =$$

$$= \langle jm'|\exp\big(\frac{-i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)\big(\sum_{j'm}|j'm\rangle\langle j'm|\big)\exp\big(\frac{i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)|jm''\rangle = \langle jm'|jm''\rangle = \delta_{mm''}$$

$\therefore$ $\exists$ a matriz inversa e ela pertence ao grupo.

3) o produto de dois membros do grupo é um membro do grupo.

$$\sum_m \mathcal{D}^j_{m'm}(R_1)\mathcal{D}^j_{mm''}(R_2) = \mathcal{D}^j_{m'm''}(R_1R_2)$$

4) a associativa é propriedade das matrizes.

Representações do Operador de Rotação

Note também que $\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R^{(-1)}) = \langle j,m'|\exp\big(\frac{+i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)|j,m\rangle =$

$$= \underbrace{\langle j,m|\big[\exp\big(\frac{+i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)\big]^{\dagger}|j,m'\rangle^{*}} = \langle j,m|\exp\big(\frac{-i\mathbf{J}.\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\big)|j,m'\rangle^{*} = \mathcal{D}^{(j)^{*}}_{mm'}(R)$$

$$\langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\beta|A^{\dagger}|\alpha\rangle^{*}$$

Para apreciar o significado físico da matriz de rotação, rode o ket:

$$|j,m\rangle \rightarrow D(R)|j,m\rangle$$

$$D(R)|j,m\rangle = 1\!\!1 D(R)|j,m\rangle = \sum_{j'm'}|j'm'\rangle\langle j'm'|D(R)|j,m\rangle = \sum_{m'}|j,m'\rangle D^{(j)}_{m'm}(R)$$

Assim, $D^{(j)}_{m'm}(R)$é amplitude para o estado rodado ser encontrado em $|j,m'\rangle$, quando o estado original for $|j,m\rangle$. Que tal a rotação definida por ângulos de Euler (α,β,γ)?

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j,m'|\exp\big(\frac{-iJ_z\alpha}{\hbar}\big)\exp\big(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\big)\exp\big(\frac{-iJ_z\gamma}{\hbar}\big)|j,m\rangle =$$

$$= \exp\big(-i(m'\alpha+m\gamma)\big)\langle j,m'|\exp\big(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\big)|j,m\rangle$$

Isso permite definir: $d^{(j)}_{m'm}(\beta) \equiv \langle j,m'|\exp\big(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\big)|j,m\rangle$ uma matriz bastante útil para rodar kets. Fizemos $d^{(1/2)}_{m'm}(\beta)$. Siga o texto e faça $d^{(1)}_{m'm}(\beta)$.

Propriedades utilizadas na aula de hoje (saiba mostrar)

$$1)\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$2)\ [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$$

$$3)\ [J^2, J_\pm] = 0$$

$$4)\ J^2 - J_z = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$$

$$5)\ J_-J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$6)\ J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$7)\ J_-|j,m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar|j,m-1\rangle$$

$$8)\ \sum_{m'} D^{(j)}_{m''m'}(R_1)D^{(j)}_{m'm}(R_2) = D^{(j)}_{m''m}(R_1R_2)$$

$$9)\ d^{(1)}(\beta)$$

Lousa

Slide 1

Lembre que ρ em $\sigma = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho)$ é uma matriz e a expressão deveria ser lida como: Traço do produto $\rho \ln \rho$, respeitando a expansão de

$$\ln x = \sum_{k}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \frac{(x-1)^k}{k}$$

com $0 < x \leq 2$. Se a matriz é diagonal, a expansão vale para qualquer termo da diagonal. E isso permite escrever:

$$\sigma = -\sum_{k} \rho_{kk}^{(\text{diag})} \ln \rho_{kk}^{(\text{diag})}$$

Slide 8 Use equações (*) dos slides 6 e 7 $\begin{cases} J_+ J_- = J_- J_+ + 2\hbar J_z \\ J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) \end{cases}$

para obter $\begin{cases} J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\ J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \end{cases}$