

O Método Variacional de Schwinger

Vimos que as $|\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}\rangle$ satisfazem as equações

$$\langle \vec{x} | \psi_{\vec{k}}^{(\pm)} \rangle = \langle \vec{x} | \phi_{\vec{k}} \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{\pm i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \psi_{\vec{k}}^{(\pm)} \rangle$$

que formalmente podem ser reescritas

$$|\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}\rangle = |\phi_{\vec{k}}\rangle + G_0^{(\pm)} V |\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}\rangle$$

ou multiplicando por V
e reorganizando

$$A^{(\pm)} |\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}\rangle = V |\phi_{\vec{k}}\rangle \quad \text{com} \quad A^{(\pm)} = V - V G_0^{(\pm)} V$$

Proposta de Schwinger

$$[f(\vec{k}', \vec{k})] = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \left[\langle \phi_{\vec{k}'} | V | \psi_{\vec{k}}^{(+)} \rangle + \langle \psi_{\vec{k}'}^{(-)} | V | \phi_{\vec{k}} \rangle - \langle \psi_{\vec{k}'}^{(-)} | A^{(+)} | \psi_{\vec{k}}^{(+)} \rangle \right]$$

note que trata-se de ① + ③ - ②

e lembre que se $|\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}\rangle$ são soluções

exatas $\rightarrow$ ① = ② = ③

1) Mostre que

$$S[f] = 0 \rightarrow A^{(\pm)} |\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}\rangle = V |\phi_{\vec{k}}\rangle$$

$$\text{se } A^{(+)\dagger} = A^{(-)}$$

Dica: trate $|\psi^{(+)}\rangle$ independente de $\langle\psi^{(-)}|$

2) Mostre que $|\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}\rangle = \sum_m a_m^{(\pm)}(\vec{k}) \psi_m$

pode ser expandida em uma base de funções quadraticamente integráveis se V é de curto alcance

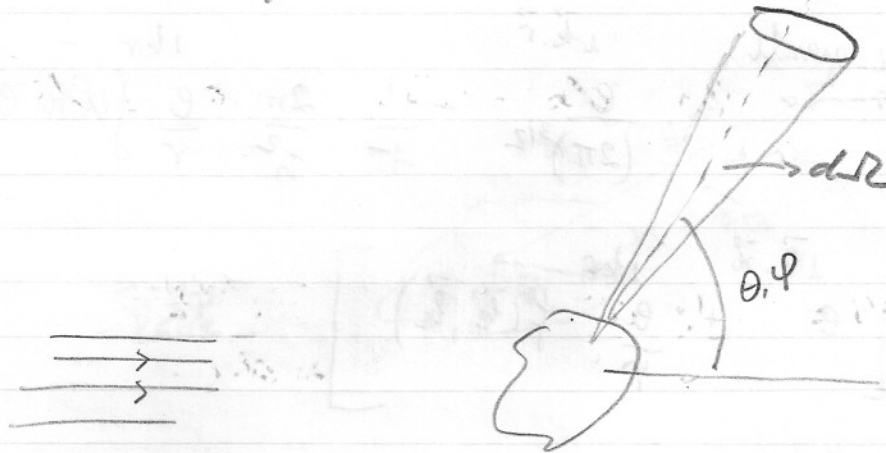
3) Use esta expansão e trate $a_m^{(\pm)}$ como parâmetros variacionais pl obter (trate $a_m^{(\pm)}$ independente de $a_n^{(\pm)}$)

$$[f] = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \sum_{mn} \langle \phi_{\vec{k}} | V | \psi_m \rangle (d^{-1})_{mn} \langle \psi_n | V | \phi_{\vec{k}} \rangle$$

$$\text{com } d_{mn} = \langle \psi_m | A^{(+)} | \psi_n \rangle$$

Note que as integrais envolvem coisas conhecidas $\phi_{\vec{k}}; \psi_m; V; G_+$

Cálculo da taxa de choque:



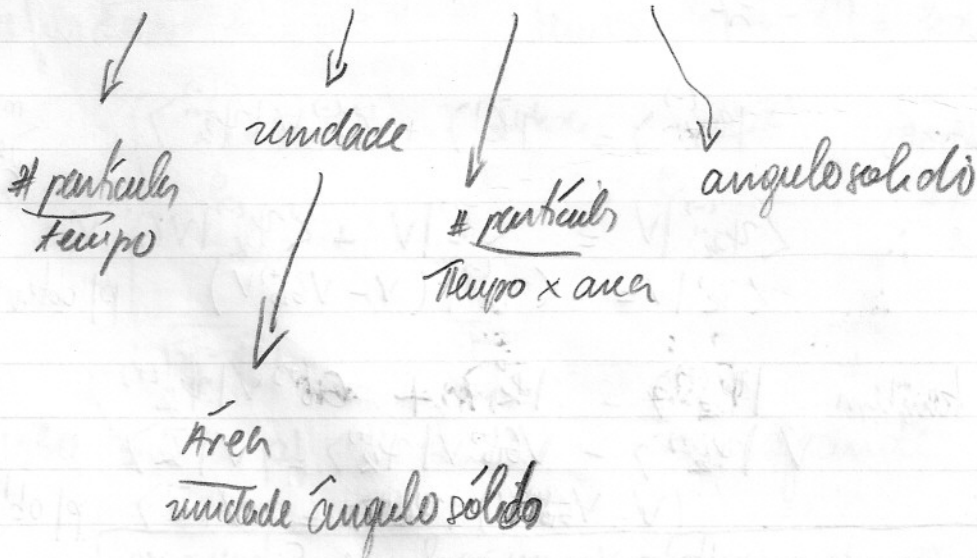
$$dn = \# \text{ partículas detectadas / tempo}$$

deve ser proporcional

fluxo de partículas incidente $\left(\frac{\# \text{ partículas}}{\text{área} \times \text{tempo}} \right)$
e
ao ângulo sólido $d\Omega$

Assim

$$dn = \sigma(\theta, \phi) F_i d\Omega$$



$$F_i \propto J_i \quad (\text{fluxo de probabilidade})$$

$$\frac{\text{partículas detectadas}}{\text{unidade tempo}} = dn = \vec{F}_f \cdot d\vec{S} \propto \vec{J}_f \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \sigma(\theta, \varphi) = \frac{\vec{J}_f \cdot d\vec{S}}{J_i d\Omega} = \frac{J_f r^2 d\Omega}{J_i d\Omega}$$

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 J_f}{J_i}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi \right]$$

$$\vec{J}_0 = \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[e^{-ikz} \frac{\hbar}{i} 1k\hat{z} e^{ikz} \right] = \frac{\hbar k}{m} \hat{z}$$

↓
 $\psi = e^{ikz}$

$$\vec{J}_f =$$

use $\psi = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$(J_f)_r = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2$$

$$(J_f)_\theta = \frac{\hbar}{mr^3} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi) \right]$$

$$(J_f)_\varphi = \frac{\hbar}{\mu} \frac{1}{r^3 \sin \theta} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\theta, \varphi) \right]$$

se r è sufficientemente grande

$$(J_f)_r \gg (J_f)_\theta \text{ e } (J_f)_\varphi$$

$$\text{Allora } \sigma(\theta, \varphi) = \frac{r^2 (J_f)_r}{J_i} = |f(\theta, \varphi)|^2$$