

AULA 13

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$\sigma_{\text{total}} = \int d\Omega |f(\theta)|^2$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \sum_e \sum_{e'} (2e+1)(2e'+1) e^{i\delta_e} e^{-i\delta_{e'}} \sin\theta e \sin\theta e' P_e P_{e'}$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{ee'} (2e+1)(2e'+1) e^{i\delta_e - \delta_{e'}} \sin\theta e \sin\theta e' \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_e(x) P_{e'}(x)}$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \sum_e 2(2e+1) \sin^2\delta_e = \frac{4\pi}{k^2} \sum_e (2e+1) \sin^2\delta_e$$

Como fica o teorema ótico

$$\text{Im } f(\theta=0) = \frac{k \sigma_{\text{tot}}}{4\pi} = \frac{1}{k} \sum_e (2e+1) \sin^2\delta_e$$

↓

$$\frac{1}{k} \sum_e (2e+1) \underbrace{\text{Im } e^{i\delta_e}}_{\sin\delta_e} \underbrace{\sin\theta P_e(\cos\theta=1)}_1$$

$$= \frac{1}{k} \sum_e (2e+1) \sin^2\delta_e$$

de volta p/ relação entre f_e e δe

qdo mudamos a energia δe muda, e por consequente muda f_e .

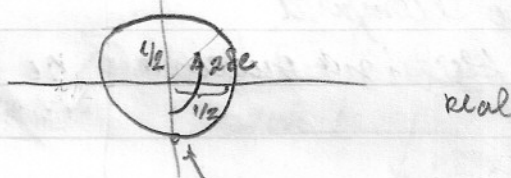
f_e , entretanto, não muda de $\forall$ maneira,

$$f_e = \frac{e^{-1}}{2ik}$$

$$kf_e = -\frac{i}{2} e^{\frac{2i\delta e}{2}} + \frac{i}{2}$$

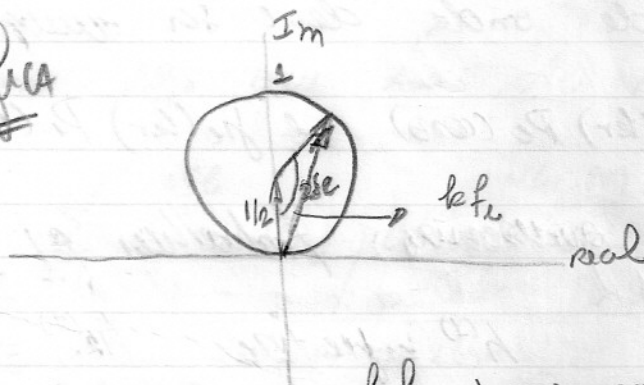
Dependências com a fase Im

$$-\frac{i}{2} e$$



começar aqui qdo $\delta e = 0$

Assim a ponta fica



kf_e fica para sobre a circunferência

se $\delta e \ll 1 \rightarrow kf_e$ fica na parte de baixo do círculo e é quase real

kf_e é máximo qdo $2\delta e = \pi \therefore \delta e = \pi/2$ (lembra que $\sigma_{total} = 4\pi \sum \frac{(2k+1)}{k^2} \sin^2 \delta e$)

Determinação dos deslocamentos de fase

Suponha $V(r) = 0$ se $r > R$

↓
alcance

p/ $r > R$ a função de onda é uma combinação de ondas esféricas

Lembre que a solução da equação de Schrödinger de $h_e(r)$ e $f_e(r)$

↓
não se comporta
bem na origem

assim p/ $r > R$ (longe da origem), a função de onda deve ser uma combinação de $h_e(r) P_e(\cos\theta)$ e $f_e(r) P_e(\cos\theta)$

ou se quisermos trabalhar p/ funções de Hankel

$$h^{(1)} = j_e + i n_e \quad h^{(2)} = j_e - i n_e$$

$$\downarrow \quad 1(kr - \pi/2) \\ \lim_{r \rightarrow \text{grande}} h^{(1)} = \frac{e}{1kr}$$

$$\downarrow \quad -1(kr - \pi/2) \\ \lim_{r \rightarrow \text{grande}} h^{(2)} = -\frac{e}{1kr}$$

Assim a função de onda pode ser escrita como

$$\langle \alpha | \psi^{(+)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l i^l (2l+1) A_l(r) P_l(\cos\theta) \quad p|r>R$$

onde $A_l = C_l^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + C_l^{(2)} h_l^{(2)}(kr)$

onde os coeficientes que multiplicam A_l são escolhidos de tal forma que se $V=0$

$A_l(r)$ fica $j_l(kr)$ em todos os pontos

$p|r>R$ e r muito grande, lembre que

$$\langle \alpha | \psi^{(+)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{P_l}{2ik} \left[\begin{array}{c} ikr - i(kr - l\pi) \\ \searrow \quad \swarrow \\ Se \frac{e}{r} - \frac{e}{r} \end{array} \right]$$

$\downarrow$
 $2i\delta_l$
 e

comparando com eq. que tem A_l isto é

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \psi^{(+)} \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l e^{\frac{i\pi l}{2}} (2l+1) \left[C_l^{(1)} \frac{e^{i(kr - l\pi/2)}}{1kr} - C_l^{(2)} \frac{e^{-i(kr - l\pi/2)}}{-1kr} \right] P_l(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{P_l}{2ik} \left[2C_l^{(1)} \frac{e^{ikr}}{r} - 2C_l^{(2)} \frac{e^{-i(kr - l\pi)}}{r} \right] \end{aligned}$$

comparação direta de

$$\therefore C_l^{(1)} = \frac{1}{2} Se = \frac{1}{2} e^{i2\delta_l} \quad \text{e} \quad C_l^{(2)} = +\frac{1}{2}$$

Assum $p | r > R$

$$A_e(r) = \frac{1}{2} e^{i2\theta} h_e^{(1)} + \frac{1}{2} h_e^{(2)}$$

$$= e^{i\theta} \left(\frac{e^{i\theta} h_e^{(1)} + e^{-i\theta} h_e^{(2)}}{2} \right)$$

$$= e^{i\theta} \left(\frac{e^{i\theta} (j_e + i n_e) + e^{-i\theta} (j_e - i n_e)}{2} \right)$$

$$= e^{i\theta} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} j_e + i \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \right) n_e \right)$$

$$= e^{i\theta} (\cos \theta j_e - \sin \theta n_e)$$

A partir disso podemos calcular

$$\beta_e \equiv \left(\frac{r}{A_e} \frac{dA_e}{dr} \right)_{r=R}$$

$$= kR \left[\frac{j_1'(kR) \cos \theta - n_1'(kR) \sin \theta}{j_1(kR) \cos \theta - n_1(kR) \sin \theta} \right]$$

onde j_1' é derivada j_1 rispetto a kR

Se aprendermos como obter β_e , podemos
inverter esta equação.

$$\frac{\beta_e}{kR} (j_e \cos \delta_e - \eta_e \sin \delta_e) = j'_e \cos \delta_e - \eta'_e \sin \delta_e$$

$$\left(\frac{\beta_e}{kR} j_e - j'_e \right) \cos \delta_e = \left(\frac{\beta_e}{kR} \eta_e - \eta'_e \right) \sin \delta_e$$

$$\tan \delta_e = \frac{kR j'_e(kR) - \beta_e j_e(kR)}{kR \eta'_e(kR) - \beta_e \eta_e(kR)}$$

assim se acharmos β_e , teremos achado δ_e

p/ determinar β_e precisamos resolver a equação de Schrodinger na região do potencial

$$\frac{d^2 u_e}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_e = 0$$

onde $u_e = r A_e(r)$

$$u_e \Big|_{r=0} = 0$$

integre esta equação até $r=R$

calcule β_e e iguale a β_e

↑
p/ b e
um número

e p/ isto ache $\tan \delta_e$

Espalhamento da Esfera dura

$$V = \begin{cases} \infty & \text{p/ } r < R \\ 0 & \text{p/ } r > R \end{cases}$$

Como a esfera é impenetrável a função de onda precisa se anular em $r=R$

isto se consegue p/ achar se (não se pode calcular p/ neste caso)

$$A_e(r) \Big|_{r=R} = 0 = e^{i\delta_0} [\cos \delta_0 j_0(kR) - \sin \delta_0 n_0(kR)]$$

$$\rightarrow \tan \delta_0 = \frac{j_0(kR)}{n_0(kR)}$$

$$\text{p/ } l=0 \quad j_0(kR) = \frac{\sin kR}{kR} \quad \text{e} \quad n_0(kR) = -\frac{\cos kR}{kR}$$

$$\therefore \tan \delta_0 = -\tan kR \quad \delta_0 = -kR$$

$$\delta_0 = -kR$$

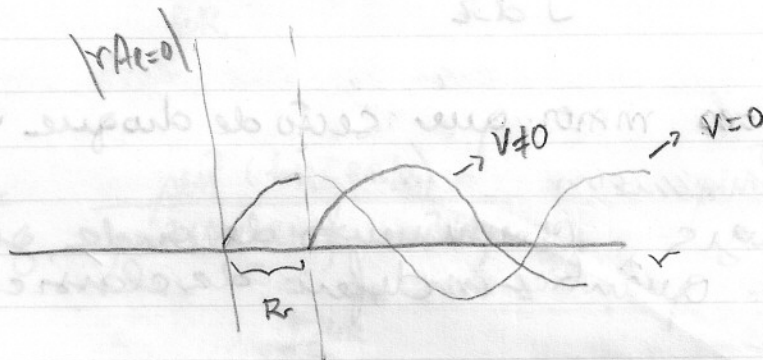
A parte radial de função de onda varia da seguinte forma

$$A_e(kr) = e^{i\delta_0} \frac{\cos \delta_0 \sin kr}{kr} + \frac{\sin \delta_0 \cos kr}{kr}$$

$$= e^{i\delta_0} \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} = e^{i\delta_0} \frac{\sin(k(r-R_0))}{kr}$$

se não houver V

$$A_0(kr) \text{ para } \chi_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$$



Estudamos tanto p/ altas e baixas energias

$$\downarrow$$

$$kR \gg 1$$

$$\downarrow$$

$$kR \ll 1$$

Baixa energia

$$kR \ll 1 \quad j_l(kr) = \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \quad n_l(kr) = -\frac{(2l-1)!!}{(kr)^{l+1}}$$

$$\text{Assim } \tan \delta_l = -\frac{(kr)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}$$

$$p/ \quad l=0 \quad \tan \delta_0 = -\underbrace{kR}_{\text{pequeno}} \approx \delta_0 \quad (\text{menor resultado que antes - que era exato})$$

e' justo jogar fora $l > 0$ pois $kR \ll 1$ e $\tan \delta_l \approx \delta_l$

$$\text{se } \delta_0 = -kR$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0$$

$$\therefore \frac{d\sigma}{dR} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} \approx \frac{k^2 R^2}{k^2} = R^2 \quad p/ \quad kR \ll 1$$

$$\sigma_{\text{total}} = \int \frac{d\sigma}{dR} dR = 4\pi R^2$$

é 4 vezes maior que seção de choque geométrica
 baixa energia comprimento de onda grande,
 mecânica quântica difere da clássica

Será que p/ altas energias temos $\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$

↓
 podemos l até $\approx kR$

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l=kR} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

considerando

$$\sin^2 \delta_l = \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l}$$

e lembrando que $\tan \delta_l = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)}$

temos

$$\sin^2 \delta_l = \frac{j_l^2(kR)}{j_l^2(kR) + n_l^2(kR)} \quad \text{agora } p/ \quad kR \gg 1$$

$$\eta_l(kR) = \frac{1}{kR} \sin(kR - l\pi/2)$$

$$\eta_l(kR) = -\frac{1}{kR} \cos(kR - l\pi/2)$$

$$\mu_l^2 s_l = \frac{\mu_l^2 (kR - l\pi/2)}{\mu_l^2 (kR - l\pi/2) + \cos^2(kR - l\pi/2)} = \mu_l^2 (kR - l\pi/2)$$

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l=kR} (2l+1) \mu_l^2 s_l$$

proque 2 termos l e l' $l' = l+1$

$$\begin{aligned} & (2(l+1)+1) \mu_{l+1}^2 s_{l+1} + (2l+1) \mu_l^2 s_l \\ &= (2l+1) (\underbrace{\mu_{l+1}^2 s_{l+1} + \mu_l^2 s_l}_1) + 2 \underbrace{\mu_{l+1}^2 s_{l+1}}_{< 1} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l=kR} (2l+1) + \sum_{l=0}^{l=kR} 2 \mu_{l+1}^2 s_{l+1}$$

de 2 em 2 resto van $1/kR$

numero de termos $\times$ valor medio

$$\frac{kR}{2} \times \frac{1 + 2kR + 1}{2}$$

$$\approx \frac{(kR)^2}{2}$$

os termos em kR jogamos fora

assim $\sigma_{\text{total}} = 2\pi R^2$