

Espalhamento de Baixa energia e estados ligados

Baixa energia: $k = \frac{1}{R} \gtrsim R$

Já vimos que l 's grandes não são importantes
 ↓
 argumento clássico (base 11R)

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V_{\text{eff}}\right) u = 0}$$

O argumento quântico pode ser construído com os S_e 's (para baixa energia, mesmo com efeito túnel, a partícula não percebe o potencial e $S_e = 0$)

Suponha que $V_{\text{eff}}(r)$ não pode acomodar um estado ligado p/ $l \neq 0$. Para baixa energia, nestas condições, $V_{\text{eff}}(r)$ é dominado por $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$

O Exercício 8 do livro texto nos ensina que

$$f_e(k) = e^{i\delta} \frac{\sin \delta}{k} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty j_l(kr) A_l(k;r) V(r) r^2 dr$$

Se o potencial é "quase" o termo centrífugo, é esperado que $A_l(k;r) \rightarrow j_l(kr)$

↓
 solução do termo centrífugo = V_{eff}

Assim

$$f_e = e^{i\delta} \frac{\sin \delta}{k} \approx -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty j_l^2(kr) r^2 V(r) dr$$

mas qdo $kr \ll 1$ $j_l(kr) \approx \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}$

$\therefore j_l^2(kr) \sim k^{2l}$

Assim $\frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} \sim k^{2l}$

Se $\delta_l \ll 1 \rightarrow e^{i\delta_l} \frac{\sin \delta_l}{k} \approx \frac{\delta_l}{k} \propto k^{2l}$

ou seja $\lim_{k \rightarrow 0} f_l(k) = 0$ se $l \neq 0$

p/ $l=0$ se vai a zero, mas na mesma velocidade que "k" vai a zero.

$\therefore$ para baixas energias, l's grandes não são importantes

Poço e Barreira retangular

$$V = \begin{cases} V_0 = \text{constante} & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

Dois casos

$V_0 > 0$ repulsivo

$V_0 < 0$ atrativo

A' problema a forma da solução p/ $r \geq R$

p/ $l=0$ $e^{i\delta_0} [j_0(kr) \cos \delta_0 - n_0(kr) \sin \delta_0] = e^{i\delta_0} \frac{\sin(kr + \delta_0)}{r}$

$j_0 = \frac{\sin kr}{kr}$ $n_0 = -\frac{\cos kr}{kr}$

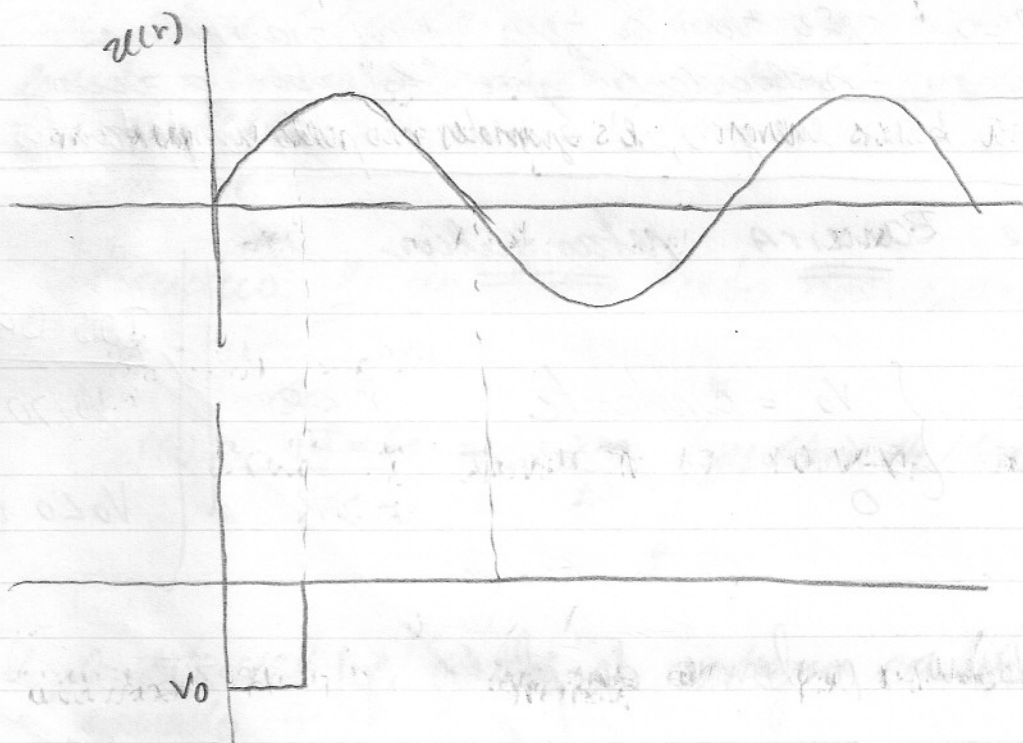
A. potencial $|p| < R$ e' simples qdo V_0 e' constante

$$r < R \quad u(r) \equiv r A e_{=0}(r) \propto \sin k'r \quad \left(\begin{array}{l} \text{e' seno pois} \\ u(0) = 0 \end{array} \right)$$

onde $E - V_0 = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}$

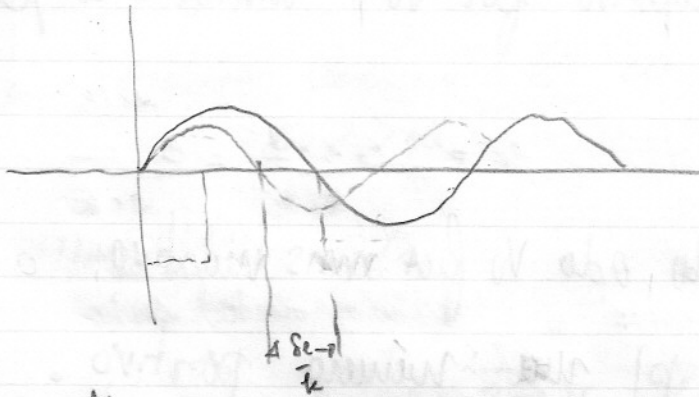
$$r > R \quad u_0(r) = e^{i\delta_0} \sin(k'r + \delta_0)$$

Se não tivéssemos potencial



- a definição da curvatura de $\sin k'r$ e' feita por k' .
- se $V_0 < 0$ ($E - V_0$) e' grande o argumento $k'r$ passa mais rápido por 2π , o seja o seno varia mais rapidamente.

isto implica que o funil zero deve durar mais depressa qdo r cresce



ou ainda

Compare

$$\sin(kr + \delta_0)$$

c/ potencial

$$\sin(kr)$$

sem potencial

Se o zero do caso "sem potencial" ocorre em r_0
o "c/ potencial" ocorrerá $kr + \delta_0 = kr_0$

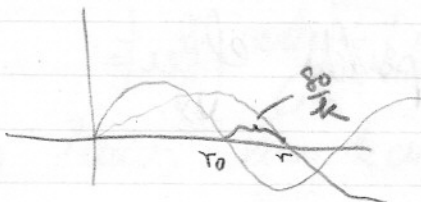
$$\therefore \text{em } r = r_0 - \frac{\delta_0}{k}$$

ou seja deslocado p/ esquerda (PARA ISSO $\delta_0 > 0$)

Se δ_0 fosse negativo, a função iria estragar.
Isto acontece p/ V_0 positivo ($E - V_0$, pequeno

o argumento kr demora mais para mudar, etc)

Nada muda se $V_0 > E$ (basta trocar $\sin$ por $\sinh$)



$$\text{Se } \delta_0 < 0 \quad r > r_0$$

Olhe mais com pouco mais de cuidado $V_0 < 0$

Quanto mais negativo for V_0 , menor é a curvatura de $\sin k'r$

↓
curvatura crescendo, qdo V_0 fica mais negativo, o $\sin$ cresce de 0 p/ um número positivo. Se continuarmos a diminuir V_0 ^(aumentar em módulo), chega um momento que $\sin$ passa por $\frac{\pi}{2}$ e isto é

um máximo na posição de choque que vari com $\sin^2$ se

Se continuarmos a diminuir V_0 , $\sin$ eventualmente alcança π , ou seja a função de onda fora da região do potencial está defasada de 180° p/ respeito a função livre

nestas condições $\sin^2 \pi = 0$

posição de choque = 0 !!

Ramsauer - Townshend effect

Espalhamento de energia zero e estados ligados

Considerem energia extremamente baixa $k \rightarrow 0$

Qual é a equação diferencial de $u(r)$ p/ $l=0$
 $r > R$?

$$V(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} = 0$$

a equação: $\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2mV}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u(r) = 0$

fica:

$$\frac{d^2 u_0(r)}{dr^2} = 0$$

uma solução óbvia desta: $u(r) = \text{constante } (r-a)$
(componente de onda infinito)

lembrando que

$$Ae(r) = \frac{e^{i(kr + \delta_0)}}{kr}$$

$$u_0(r) = \frac{e^{i(kr + \delta_0)}}{k} = \frac{e}{k} \sin\left(k\left(r + \frac{\delta_0}{k}\right)\right)$$

isto varia até

note que qdo $k \rightarrow 0$ $u_0(r) \rightarrow \frac{e^{i(kr + \delta_0)}}{k} \sim \frac{e}{k} \left(r + \frac{\delta_0}{k} \right)$

Escrevendo $\frac{u'}{u} = \frac{k \cos(kr + \delta_0)}{\sin(kr + \delta_0)}$

forma acima
cte $(r-a)$

$$= k \cotg\left[k\left(r + \frac{\delta_0}{k}\right)\right] \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{\text{constante}}{\text{constante } (r-a)} = \frac{1}{r-a}$$

p/ $r=0$ temos $\lim_{k \rightarrow 0} k \cotg \delta_0 \rightarrow \frac{1}{-a}$ esta é a maneira de definir a

a quantidade a é conhecida por comprimento de espalhamento

$$\text{Lembrando que } f_e = \frac{e^{-1}}{2ik} = \frac{e^{-1}}{2ik}$$

$$= \frac{e^{18e}}{k} \text{ sen } e = \frac{1}{k} (\cos e + i \sin e) \text{ sen } e$$

$$= \frac{1}{k} \frac{\cos e - i \sin e}{\cos e - i \sin e} (\cos e + i \sin e) \text{ sen } e$$

$$= \frac{1}{k} \frac{\cos^2 e + \sin^2 e}{\cos e - i \sin e} = \frac{1}{k \cos e - ik \sin e} = \frac{1}{k \cos e - ik \sin e} = -a$$

$$J_{\text{total}} = 4\pi \sum_e (2e+1) |f_e|^2 = 4\pi a^2$$

"a" tem a mesma dimensão que "R" mas eles podem ser muito diferentes

Como interpretar a? Que tal pensar numa reta

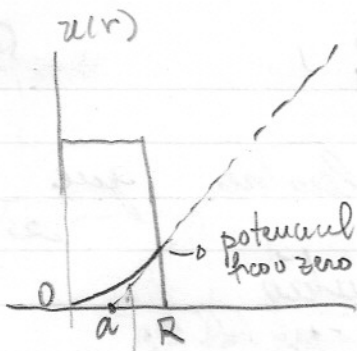
tangente a função em $r=R$ (a solução externa) e formar a intersecção. Isso é exatamente impor que $p|_{k=0}$ a solução externa é do tipo $e^{i(r-a)}$. Quando formamos

$e^{i(r-a)} = 0$ (intersecção) definimos a

Assim

$V_0 > 0$

Fig. 1



lembra
que
a solução cai exponencialmente

nas figuras:
$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left(-k^2 + \frac{2mV}{\hbar^2} \right) u(r)$$

com $u(r) > 0$ $\forall r < R$
Isto é uma escolha

a70

figura exagerada
lembra que queremos $k \rightarrow 0$

se $V_0 < 0$

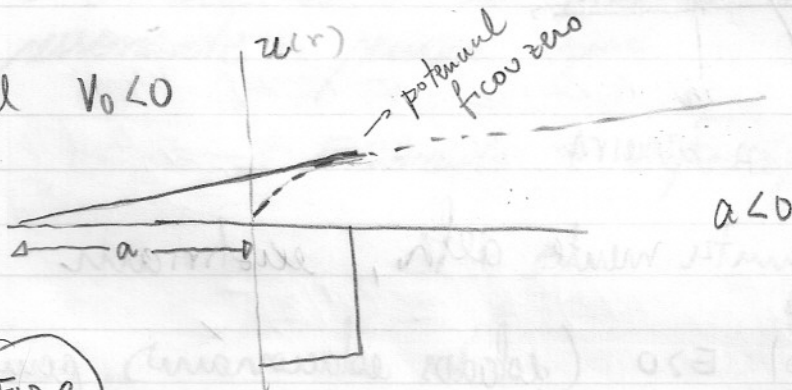


Fig. 2

se $V_0 < 0$

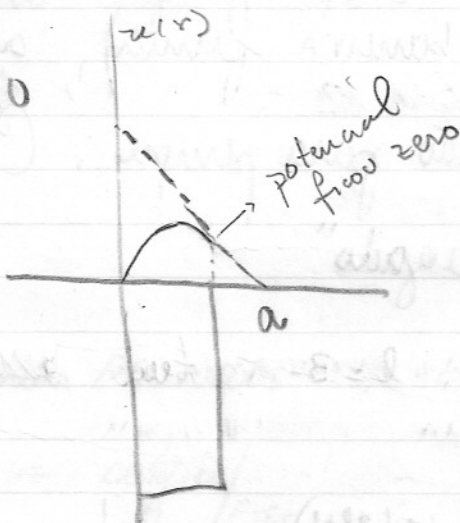


Fig. 3

a > 0 de novo

pode ser muito menor
que R neste caso

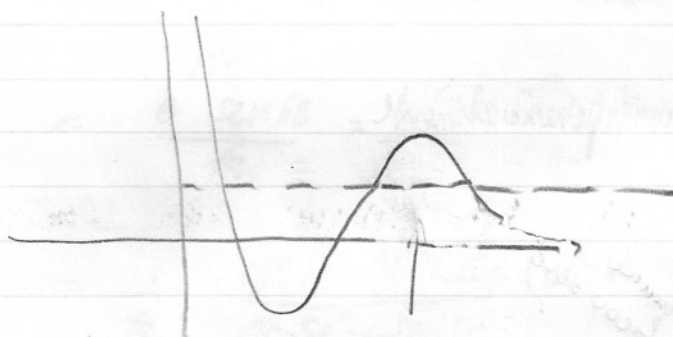
Note que:

A mudança de sinal de "a" está relacionada ao aparecimento
de um estado ligado próximo de zero

Olhe Figs 2 e 3 Tem que haver mudança de parâmetro de $u(r)$ para que ela represente
estado ligado. ($u(r) \rightarrow 0$ no infinito)

Espalhamento ressonante

Suponha $V(r)$ atrativo, bemba que $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dr^2}$ e' repulsivo. $V_{eff}(r)$ e' entao



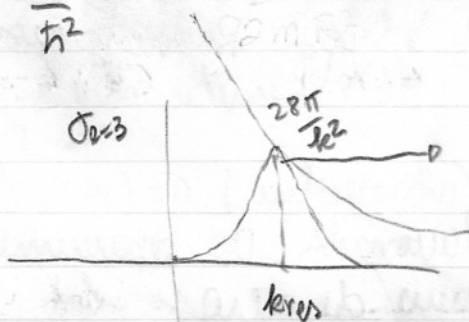
A baneira

Se ela fosse infinitamente alta, existiriam estados ligados p/ $E > 0$ (estados estacionários com tempo de vida infinito)

No caso mais realista (baneira finita), a partícula e' posta dentro, mas não para sempre. Chamaremos este estado de "quase ligado"

Exemplo

CAIXA q/ $\frac{2m V_0 l^2}{\hbar^2} = 5.5$ Para $l=3$ tem ressonâncias



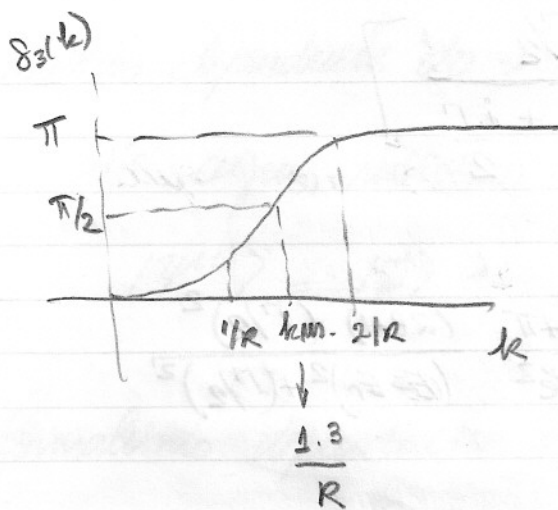
$\frac{4\pi(2l+1)}{k^2} \rightarrow$ isto vem de

$$T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

assim

$$T = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

limite $\lim_{k \rightarrow 0} \delta_l \rightarrow k^{2l}$



O deslocamento de fase exibe um comportamento ressonante sempre que

$$E_{incidente} \approx E_{quase\ ligado}$$

$$E \approx E_r$$



Se máximo → Se para por $\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$...)

Lembrando que $f_e = \frac{1}{k(\cot \delta_e - i)}$



$$\frac{\cos \delta_e}{\sin \delta_e} \rightarrow 0$$

Expandindo ao redor de $E = E_r$

$$\cot \delta_e = \underbrace{\cot \delta_e}_{=0} \Big|_{E=E_r} - \underset{\text{convenção}}{C}(E-E_r) + O(E-E_r)^2$$

Assim $f_e(k) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{-C(E-E_r) - i} \right]$ se definirmos $C = \frac{2}{\Gamma}$

$$f_e = -\frac{1}{k} \left[\frac{\Gamma/2}{(E-E_r) + i\frac{\Gamma}{2}} \right]$$

Fórmula

Breit-
Wigner

$$\sigma_e = 4\pi(2l+1)|f_e|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2l+1)(\Gamma/2)^2}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

Máximo $\sigma_{e_{\max}} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1)$

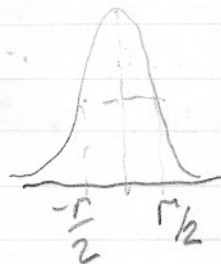
metade do máximo $\frac{1}{2} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2l+1)(\Gamma/2)^2}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$

$$(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2 = 2(\Gamma/2)^2$$

$$(E-E_r)^2 = (\Gamma/2)^2$$

$$E-E_r = \pm \Gamma/2$$

$$E = E_r \pm \Gamma/2$$



for $\frac{1}{k^2}$ Γ_e mais longa se a ressonância
for fixa o pico para desparecendo dependência