

Partículas Idênticas - Cap. 21 MerzbacherResumo introdutório

A idêa clássica de partículas idênticas não funciona $\rightarrow$ "ponte as bolinhas e saiba a trajetória de cada uma delas"

na MQ onde há "overlap" perde-se a noção de identidade das partículas

$\Rightarrow$ verificações experimentais que o conceito quântico é o correto

- Espectro de átomos de muitos elétrons
 $\hookrightarrow$ princípio de Exclusão de Pauli
 tem papel fundamental

- Espalhamento de partículas por partículas idênticas ao espalhador

Apresentação do capítulo

- formalismo de "2ª quantização"
 (boa p/ teoria de campos e física de partículas)
 número de ocupação
 densidade de ocupação
 operadores de criação e de aniquilação

- Bósons (estatística de Bose-Einstein)
 e
 Férmions (estatística de Fermi-Dirac)

1. Indistinguishability of particles e espaço de estados

Antes: como seria o espaço de estados
= p/ 2 partículas distintas

que tal $\{ |\phi_n\rangle \otimes |\psi_m\rangle \}$

onde $\sum |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = 1$

$$\sum |\psi_m\rangle \langle \psi_m| = 1$$

Exemplo $\chi(r_1, r_2) = \sum_n a_n(r_2) \phi_n(r_1)$

↓
fixe r_2 , sobra uma função de r_1
que pode ser expandida
na base $\{ \phi_n(r_1) \}$

O índice $a_n(r_2)$ é uma função de
 r_2 e pode ser expandida em $\psi_m(r_2)$

$$a_n(r_2) = \sum_m b_{nm} \psi_m(r_2)$$

$$\therefore \chi(r_1, r_2) = \sum_{nm} b_{nm} \underbrace{\phi_n(r_1) \psi_m(r_2)}_{\text{base completa}}$$

↓
função χ

$$|b_{nm}|^2$$

probabilidade de
encontrar 1 em ϕ_n
2 em ψ_m

p) partículas idênticas não sabemos dizer qual está em ψ_m e qual está em ψ_n

portanto não devemos mudar o estado (só a fase)
deve haver uma relação entre b_{mn} e b_{nm}

nosso trabalho é remover a redundâncias

K representa conjunto completo de observáveis (1-partícula)
que comutam
 K_i autovalores que definem o estado de
uma partícula

Um estado do sistema ^{de n partículas} Ψ é definido por

n_1 estão em K_1
 n_2 estão em K_2

Estados arbitrários são combinações destes estados

$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle$

Exemplo: $1 e^- \rightarrow |x_1, y_1, z_1; \sigma_1\rangle$

$\downarrow$
 $S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_1$ c) $\sigma = \pm 1$

outro e^- em $|x_2, y_2, z_2, \sigma_2\rangle$

Qual é qual (não sabemos)

O que é partícula? : próton e neutrão (podem ser
considerados
uma única
partícula em
estados de spins)
 e^+ e e^-
átomos

hipótese $\left\{ \begin{array}{l} \text{Um conjunto completo de operadores } K, \\ \text{que descrevem o comportamento} \\ \text{de uma única partícula, pode} \\ \text{ser usado para descrever } n \\ \text{partículas da mesma espécie} \end{array} \right.$

$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle$ — Notação de Fock

p) cada autovalor K_i de K corresponde
um operador número de ocupação N_i
cujo autovalor caracteriza o estado
no qual n_i das partículas tem
o valor K_i

n_i é autovalor de N_i
↓
número de ocupação

$\{N_i\}$ formam C.C.O.C

$$N_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$$

Estado do Vácuo

$$\psi^{(0)} \equiv |0\rangle = |0, 0, 0, \dots\rangle$$

Estados de uma partícula

$$\psi_i^{(1)} \equiv |K_i\rangle = |0, 0, \dots, n_i=1, 0, 0, \dots\rangle$$

$\hookrightarrow K_i$
de uma partícula (autovalores de K)

Devemos construir a "teoria" e ver que ψ de partículas não interagentes podem descrever estados de partículas interagentes.

Operadores de Criação e de Aniquilação

maior

$$a_i^+ |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i+1, n_{i+1}, \dots\rangle$$

adicione
uma partícula
entre aquelas
que tem autovalor
 K_i p/ o operador K

$$\langle c | a_i^+ | d \rangle = \langle d | a_i | c \rangle^*$$

Suponha $|d\rangle = |\dots n_i \dots\rangle$ como $a_i^+ |\dots n_i \dots\rangle \propto |\dots n_i+1 \dots\rangle$

então $\langle c | \dots n_i+1 \dots \rangle \neq 0$ só se $|c\rangle = |\dots n_i+1 \dots\rangle$

$$\text{mas agora } \langle d | a_i | c \rangle^* = \langle \dots n_i \dots | a_i | \dots n_i+1 \dots \rangle$$

então "a" remove - aniquila - partículas

$$\langle d | a_i | c \rangle^* \propto \langle \dots n_i \dots | \dots n_i \dots \rangle$$

$$\therefore a_i |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots\rangle \propto |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots\rangle$$

requeremos

$$a_i^\dagger |\psi^{(0)}\rangle = a_i^\dagger |0\rangle = \psi_i^{(1)} = |K_i\rangle = |0, 0, \dots, n_i=1, \dots\rangle$$

$$a_i |\psi_n^{(1)}\rangle = a_i |K_n\rangle = a_i |0, 0, \dots, n_n=1, 0, \dots\rangle = \delta_{in} \psi^{(0)} = \delta_{in} |0\rangle$$

$$a_i |\psi^{(0)}\rangle = a_i |0\rangle = a_i |0, 0, \dots\rangle = 0$$

Exercício 21.1 mostre que

$$|\langle K_i | \psi^{(1)} \rangle|^2 = |\langle 0 | a_i | \psi^{(1)} \rangle|^2 = \langle \psi^{(1)} | a_i^\dagger a_i | \psi^{(1)} \rangle$$

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_n c_n |\psi_n^{(1)}\rangle$$

$$a_i |\psi^{(1)}\rangle = \sum_n c_n a_i |\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_n c_n \delta_{in} |0\rangle = c_i |0\rangle$$

$$\therefore \langle \psi^{(1)} | a_i^\dagger = \langle 0 | c_i^*$$

$$\therefore \langle \psi^{(1)} | a_i^\dagger a_i | \psi^{(1)} \rangle = \langle 0 | c_i^* c_i | 0 \rangle = |c_i|^2$$

cq d

Transformações unitárias

Considere $|L_q\rangle$ autoket de $L \neq K$

$$|K_i\rangle = \sum_q |L_q\rangle \langle L_q | K_i \rangle$$

$\langle L_q | K_i \rangle$ é uma matriz unitária

podemos definir
 $\sim$ quadrado
 N_q número
de ocupação
 n_q autovalores
conjug.

$$\Phi^{(0)} = \psi^{(0)} = |0\rangle$$

Valores iguais nestes
dois espaços

$$\Phi^{(1)} = |0, 0, \dots, \tilde{n}_q, \dots, 0\rangle = |L_q\rangle$$

podemos definir b_q^+ e b_q

$$b_q^+ |\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_q, \dots\rangle \propto |\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_q + 1, \dots\rangle$$

$$b_q |\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_q, \dots\rangle \propto |\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_q - 1, \dots\rangle$$

$$a_i^+ |0\rangle = \psi_i^{(1)} = |K_i\rangle = \sum_q |L_q\rangle \langle L_q | K_i\rangle = \sum_q b_q^+ |0\rangle \langle L_q | K_i\rangle$$

$$\therefore \boxed{a_i^+ = \sum_q b_q^+ \langle L_q | K_i\rangle}$$

$$\boxed{a_i = \sum_q \langle K_i | L_q\rangle b_q}$$

Isto pode ser visto tb através de (pense 1 ou zero partículas)

$$a_i \psi_r^{(1)} = \delta_{ir} \psi^{(0)} = \langle K_i | K_r\rangle \psi^{(0)} = \sum_q \langle K_i | L_q\rangle \langle L_q | K_r\rangle \psi^{(0)}$$

$$= \sum_{qr} \langle K_i | L_q\rangle \langle L_r | K_r\rangle \delta_{qr} \psi^{(0)} = \sum_{qr} \langle K_i | L_q\rangle \langle L_r | K_r\rangle b_q \Phi_r^{(1)}$$

$$= \left(\sum_q b_q \langle K_i | L_q\rangle \right) \left(\sum_r \Phi_r^{(1)} \langle L_r | K_r\rangle \right) \xrightarrow{\text{só uma partícula } \Phi_r^{(1)} = |K_r\rangle} = \sum_q b_q \langle K_i | L_q\rangle \psi_r^{(1)}$$

Pense

$$a_i^+ = \sum_q b_q^+ \langle L_q | K_i \rangle$$



uma
partícula
com
autovalor
 K_i

uma partícula com autovalor L_q
moderadora pela amplitude
 $\langle L_q | K_i \rangle$

hipótese fundamental [vale p/ sistemas com $\neq$ número
de partículas]

↓
princípio da simetria unitária

Antes note

$$\begin{aligned} a_i^+ &= \sum_q b_q^+ \langle L_q | K_i \rangle = \sum_s \underbrace{\sum_q b_q^+ \langle L_q | M_s \rangle \langle M_s | K_i \rangle}_{C_s^+} \\ &= \sum_s C_s^+ \langle M_s | K_i \rangle \end{aligned}$$

onde C_s^+ uma partícula
com autovalor M_s do
operador M

A álgebra dos operadores de criação e de aniquilação

hipótese

$$a_i^+ a_j^+ \psi = \lambda a_j^+ a_i^+ \psi$$

(a ordem de
criação não deve alterar
o estado final)

dependendo da definição pode afetar a normalização

Assim

$$0 = (a_i^\dagger a_j^\dagger - \lambda a_j^\dagger a_i^\dagger) \psi = \sum_{q \neq i} \langle L_q | K_i \rangle \langle L_e | K_j \rangle (b_q^\dagger b_e^\dagger - \lambda b_e^\dagger b_q^\dagger) \psi$$

↓

$$\text{lembre } a_i^\dagger = \sum_q b_q^\dagger \langle L_q | K_i \rangle$$

As transformações unitárias são arbitrárias exceto pelas condições

$$\langle K_i | K_j \rangle = \delta_{ij} = \sum_k \langle K_i | L_k \rangle \langle L_k | K_j \rangle$$

pl valer pl $\neq \psi$

pedimos que $b_q^\dagger b_e^\dagger - \lambda b_e^\dagger b_q^\dagger = 0$ com o mesmo λ (independente de $e \neq q$)

$$\therefore b_e^\dagger b_q^\dagger - \lambda b_q^\dagger b_e^\dagger = 0 \quad (\text{troque } e \leftrightarrow q)$$

$$\therefore b_q^\dagger b_e^\dagger - \lambda^2 b_q^\dagger b_e^\dagger = 0 \quad \text{so' se } \boxed{\lambda = \pm 1}$$

são iguais

dois tipos

$$\therefore \begin{cases} a_i^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i^\dagger = 0 \\ a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger = 0 \end{cases}$$

O conjugado Hermitiano leva

$$\left. \begin{aligned} a_i a_j - a_j a_i &= 0 \\ a_i a_j + a_j a_i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{dois tipos}$$

O mesmo argumento pode ser usado p/

$$a_i a_j^\dagger \psi = \mu a_j^\dagger a_i \psi \quad \text{c/ } i \neq j$$

$$(a_i a_j^\dagger - \mu a_j^\dagger a_i) \psi = \sum_{k \neq l} \langle K_i | L_k \rangle \langle L_l | K_j \rangle.$$

lembrando

$$\begin{cases} a_i = \sum_k b_k \langle K_i | L_k \rangle \\ a_j^\dagger = \sum_l b_l^\dagger \langle L_l | K_j \rangle \end{cases} \quad \left| \quad (b_k b_l^\dagger - \mu b_l^\dagger b_k) \psi = 0 \right.$$

$$= \sum_{k \neq l, k \neq l} \langle K_i | L_k \rangle \langle L_l | K_j \rangle (b_k b_l^\dagger - \mu b_l^\dagger b_k) \psi$$

$$+ \sum_k \langle K_i | L_k \rangle \langle L_k | K_j \rangle (b_k b_k^\dagger - \mu b_k^\dagger b_k) \psi = 0$$

Da primeira soma condizemos

$$b_k b_l^\dagger - \mu b_l^\dagger b_k = 0 \quad l \neq k$$

Da segunda soma

basta

$$(b_k b_k^\dagger - \mu b_k^\dagger b_k) = A$$

↳ independente de k

pois

$$\sum_k \langle K_i | L_k \rangle \langle L_k | K_j \rangle A = 0 \quad (\text{porque } i \neq j)$$

Note que começando de novo c/

$$b_k b_l^\dagger - \mu b_l^\dagger b_k = 0 \quad l \neq k$$

concluímos

$$a_i a_j^\dagger - \mu a_j^\dagger a_i = 0 \quad i \neq j$$

$$a_i a_i^\dagger - \mu a_i^\dagger a_i = B$$

mas $(b_k b_k^\dagger - \mu b_k^\dagger b_k) |0\rangle = b_k b_k^\dagger |0\rangle = |0\rangle$

podemos $\therefore$ escolher $b_k b_k^\dagger - \mu b_k^\dagger b_k = 1$

escolher também

$$A = B = 1$$

falta achar μ

Conseguimos definir $N = \sum_i N_i$

lembrar que N_i é um operador Hermitiano cujo autovalor n_i é o número de ocupação

Como o número total de partículas independe da base,

$$N = \sum_k N_k$$

lembrar que $a_i^\dagger = \sum_q b_q^\dagger \langle L_q | K_i \rangle$

$$a_i = \sum_{q'} b_{q'} \langle K_i | L_{q'} \rangle$$

21.2

$$\therefore \sum_i a_i^\dagger a_i = \sum_{q, q'} b_q^\dagger b_{q'} \langle L_q | K_i \rangle \langle K_i | L_{q'} \rangle = \sum_q b_q^\dagger b_q$$

$\therefore$ definiremo

$$N_i = a_i^\dagger a_i$$

$$\tilde{N}_q = b_q^\dagger b_q$$

poteríamos ter definido

$$\bar{N}_i = a_i a_i^\dagger = 1 + \mu a_i^\dagger a_i = 1 + \mu N_i$$

$\downarrow$

$$a_i a_i^\dagger - \mu a_i^\dagger a_i = 1$$

Over essa N_i o $\bar{N}_i$ a forma geral

$$e' \quad N_i = x a_i^\dagger a_i + y \mathbb{1}$$

como $N_i |0\rangle = 0 \quad y = 0$

como $N_i \psi_i^{(1)} = \psi_i^{(1)} \quad x = 1$

$$\therefore \boxed{N_i = a_i^\dagger a_i}$$

note $N_i a_k | \dots n_i \dots n_k \dots \rangle \propto N_i | \dots n_i \dots n_{k-1} \dots \rangle = n_i | \dots n_i \dots n_k \dots \rangle$

$$a_k N_i | \dots n_i \dots n_k \dots \rangle = a_k n_i | \dots n_i \dots n_k \dots \rangle \propto n_i | \dots n_i \dots n_k \dots \rangle$$

$$\therefore N_i a_k - a_k N_i = 0 \quad |i| \neq |k|$$

mostre $\boxed{N_i a_k^\dagger - a_k^\dagger N_i = 0} \quad \forall |i| \neq |k|$

arguer

$$N_i a_i | \dots n_i \dots \rangle = C N_i | \dots n_{i-1} \dots \rangle = C(n_{i-1}) | \dots n_{i-1} \dots \rangle$$

$$a_i N_i | \dots n_i \dots \rangle = n_i a_i | \dots n_{i-1} \dots \rangle = C(n_{i-1}) | \dots n_{i-1} \dots \rangle$$

$$(N_i a_i - a_i N_i) | \dots n_i \dots \rangle = (C(n_{i-1}) - C(n_i)) | \dots n_{i-1} \dots \rangle$$

$$= (C(n_{i-1}) - C(n_i)) \frac{a_i}{C} | \dots n_i \dots \rangle$$

$$= -a_i | \dots n_i \dots \rangle$$

$$\therefore \boxed{(N_i a_i - a_i N_i) = -a_i}$$

$$\text{montre que } \boxed{N_i a_i^\dagger - a_i^\dagger N_i = a_i^\dagger}$$

$$\text{Note que } N_i a_k - a_k N_i = 0 \quad i \neq k$$

$$\text{mais } a_k N_i = a_k a_i^\dagger a_i = \mu a_i^\dagger a_k a_i = \mu a_i^\dagger a_i a_k$$

$$\quad \quad \quad \hookrightarrow a_k a_i = a_i a_k$$

$$= \mu N_i a_k$$

$$\therefore (1 - \mu) N_i a_k = 0 \quad \therefore \mu = 1$$

$$\hookrightarrow \text{user } \{a_i, a_p\} = 0$$

$$\text{seul } (1 + \mu) N_i a_k \text{ se } \{a_i, a_p\} = 0$$

$$\hookrightarrow \therefore \mu = -1$$

Assum fermions

$$a_k^\dagger a_e^\dagger - a_e^\dagger a_k^\dagger = 0$$

$$a_k a_e - a_e a_k = 0$$

$$a_k a_e^\dagger - a_e^\dagger a_k = \delta_{ke} \mathbb{I}$$

Caso

Bose-Einstein

$$a_k^\dagger a_e^\dagger + a_e^\dagger a_k^\dagger = 0$$

$$a_k a_e + a_e a_k = 0$$

$$a_k a_e^\dagger + a_e^\dagger a_k = \delta_{ke} \mathbb{I}$$

Caso

Fermi-Dirac

note que pf fermions

$$a_k^\dagger a_k^\dagger = 0$$

não dá pra criar duas partículas
no mesmo estado