

Aula 18

O Espectro contínuo de uma partícula e Operadores Quânticos de Campo.

até aqui $\langle K_i / K_j \rangle = \delta_{ij}$. Que tal

$$\langle x', \sigma' | x'', \sigma'' \rangle = \delta(x' - x'') \delta_{\sigma', \sigma''}$$

autovalores dos $\left\{ \begin{array}{l} x \\ \sigma_z \end{array} \right.$ operadores

$\psi_{\sigma'}(\vec{r}')$ destrói uma partícula com
número quântico descreto σ'
e posição $\vec{r}'$

Operador quântico de campo

Postulados

$$\psi_{\sigma'}(\vec{r}') \psi_{\sigma''}(\vec{r}'') \mp \psi_{\sigma''}(\vec{r}'') \psi_{\sigma'}(\vec{r}') = 0$$

$$\psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}') \psi_{\sigma''}^{\dagger}(\vec{r}'') \mp \psi_{\sigma''}^{\dagger}(\vec{r}'') \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}') = 0$$

$$\psi_{\sigma'}(\vec{r}') \psi_{\sigma''}^{\dagger}(\vec{r}'') \mp \psi_{\sigma''}^{\dagger}(\vec{r}'') \psi_{\sigma'}(\vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') \delta_{\sigma', \sigma''}$$

↑

- Bose - Einstein
+ Fermi - Dirac

O que

percebe? $\psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}') \psi_{\sigma'}(\vec{r}')$ contador de partículas
em $\vec{r}'$ com spin σ'

operando $N = \sum_{\vec{r}'} \int \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}') \psi_{\sigma'}(\vec{r}') d^3r' = \# \text{ total de partículas}$
cujo autovalor é

②

operadores aditivos de 1-partículas

$$K = \sum_{\sigma' \sigma''} \iint \psi_{\sigma'}^+(\vec{r}') \langle r' \sigma' | K | r'' \sigma'' \rangle \psi_{\sigma''}(\vec{r}'') d^3 r' d^3 r''$$

operadores aditivos de 2-partículas

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\sigma' \sigma'' \sigma''' \sigma''''} \iiint \psi_{\sigma'}^+(\vec{r}') \psi_{\sigma''}^+(\vec{r}'') \psi_{\sigma'''}(\vec{r}''') \psi_{\sigma''''}(\vec{r}'''')$$

$$\times \langle \vec{r}' \sigma', \vec{r}'' \sigma'' | V | \vec{r}''' \sigma''', \vec{r}'''' \sigma'''' \rangle d^3 r' d^3 r'' d^3 r''' d^3 r''''$$

③

NOTE

$$|\psi^{(n)}\rangle = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \\ \dots}} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | \psi^{(n)}\rangle$$

onde $n_1 + n_2 + \dots = n$

olhe para o ket $\psi_{\sigma_n}^{(+)}(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^{(+)}(\vec{r}_1) |0\rangle$

e tome

$$\underline{\mathbb{1}_S} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \int d^3r_1 \dots \int d^3r_n \psi_{\sigma_n}^{(+)}(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^{(+)}(\vec{r}_1) |0\rangle \langle 0|$$

$\psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n)$

e' especial

com $N = \sum_{\sigma_i} \int \psi_{\sigma_i}^{(+)}(\vec{r}') \psi_{\sigma_i}(\vec{r}') d^3r' = \text{operador, cujo autvalor e' } n$
qdo aplicado em $|\psi^{(n)}\rangle$

Assim $|\psi^{(n)}\rangle = \underline{\mathbb{1}_S} |\psi^{(n)}\rangle$

$$|\psi^{(n)}\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \int d^3r_1 \dots \int d^3r_n \psi_{\sigma_n}^{(+)}(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^{(+)}(\vec{r}_1) |0\rangle$$

$$\underbrace{\langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) | \psi^{(n)} \rangle}$$

representação de $|\psi^{(n)}\rangle$

(4)

Assim $|\psi^{(n)}\rangle$, um estado arbitrário de n partículas pode ser representado por:

$$\psi(\vec{r}_1 \sigma_1, \vec{r}_2 \sigma_2, \dots, \vec{r}_n \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \psi_{\sigma_2}(\vec{r}_2) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) | \psi^{(n)} \rangle$$

note que $\psi_{\sigma}^+(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) | 0 \rangle$

seja uma partícula σ_1 em $\vec{r}_1$
 σ_2 " $\vec{r}_2$
 $\vdots$
 σ_n " $\vec{r}_n$

note que o 1 escolhido faz:

$\psi(\vec{r}_1 \sigma_1, \dots, \vec{r}_n \sigma_n)$ simétrica para permutações pl B.E.

e
 Antissimétrica pl $n = n$ F.D

onde permuta e troca de índices

$$\text{Calcule } \psi(\vec{r}_1 \sigma_1, \vec{r}_3 \sigma_3, \vec{r}_2 \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \psi_{\sigma_3}(\vec{r}_3) \psi_{\sigma_2}(\vec{r}_2) \dots | \psi^{(n)} \rangle \overset{\text{FD}}{=} \pm \overset{\text{BE}}{\psi(\vec{r}_1 \sigma_1, \vec{r}_2 \sigma_2, \vec{r}_3 \sigma_3)}$$

3

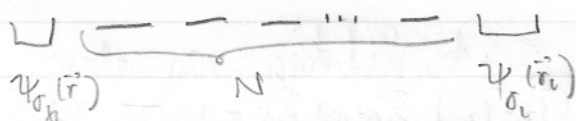
Caso mais geral de troca $n \leq n$

$$\psi(\vec{r}_1 \sigma_1 \dots \vec{r}_i \sigma_i \dots \vec{r}_j \sigma_j \dots \vec{r}_n \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_i}(\vec{r}_i) \dots \psi_{\sigma_j}(\vec{r}_j) \dots | \psi^{(n)} \rangle$$

calcule

$$\psi(\vec{r}_1 \sigma_1 \dots \vec{r}_n \sigma_n \dots \vec{r}_i \sigma_i \dots \vec{r}_j \sigma_j \dots \vec{r}_n \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_i}(\vec{r}_i) \dots | \psi^{(n)} \rangle$$

Suponha
N permutações c/n
p/ encostar em i



N p/ encostar no j

1 p/ permutar i c/n

e N p/ fazer o "i" chegar na antiga
posição do j

$\therefore 2N+1$ permutações (um número ímpar)

se B.E. $+1$
FD $(-1)^{2N+1} = -1$

(6)

Note o caso especial de $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \dots, \vec{r}_n, \sigma_n)$

1 partícula $\psi(\vec{r}, \sigma) = \langle 0 | \psi_0(\vec{r}) | \psi^{(1)} \rangle = \langle \vec{r} \sigma | \psi^{(1)} \rangle$

↓
funções de onda ordinárias

funções de onda $\times$ representações de Fock

↳ tem que carregar índices p/ partículas e funções e tem que

Menzbach faz diferente. Ele pergunta:

É possível achar $|\psi^{(n)}\rangle$ em função de $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2, \dots)$?

A resposta é:

$$|\psi^{(n)}\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots} \left[\dots \right] \frac{1}{\sqrt{n!}} \psi_{\sigma_n}^+(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) |0\rangle \psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2, \dots, \vec{r}_n, \sigma_n) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots$$

para te convencer disso, ele primeiro mostra que

$$F_n \equiv \langle 0 | \psi_0(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) \psi_{\sigma'_n}^+(\vec{r}'_n) \dots \psi_{\sigma'_1}^+(\vec{r}'_1) | 0 \rangle$$

$$= \sum_{P_n} \text{sign}(P_n) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}'_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}'_2) \dots \delta(\vec{r}_n - \vec{r}'_n) \delta_{\sigma_1, \sigma'_1} \dots \delta_{\sigma_n, \sigma'_n}$$

onde a soma é para ser tomada sobre todas as permutações P_n das coordenadas $(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2, \dots, \vec{r}_n, \sigma_n)$ (com as coordenadas linhas fixas) e $\text{sign}(P_n)$ é o sinal de permutação

BE $\text{sign}(P_n) = 1$

FD $\text{sign}(P_n) = 1$ P_n par

-1 P_n ímpar

ver página 11

7

Como se trata de uma forma geral $|\psi^{(n)}\rangle$

que tal

$$|\psi^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int d^3r_1 \dots d^3r_n \underbrace{\psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}^+(\vec{r}_n)}_{\text{forma uma base}} |0\rangle f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

pense em

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_{\sigma} |\vec{r}\sigma\rangle \langle \vec{r}\sigma | \psi^{(1)}\rangle$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\psi_{\sigma}^+(\vec{r})|0\rangle \quad \psi^{(1)}(\vec{r})$$

↓
igual
sem simetria

Substitua a expressão geral

em

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) | \psi^{(n)} \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} \int d^3r'_1 \dots d^3r'_n \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) \psi_{\sigma'_1}^+(\vec{r}'_1) \dots \psi_{\sigma'_n}^+(\vec{r}'_n) | 0 \rangle f(\vec{r}'_1, \sigma'_1, \dots, \vec{r}'_n, \sigma'_n)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots} \int d^3r'_1 \dots d^3r'_n \sum_{P_n} \text{smal}(P_n) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}'_1) \dots \delta(\vec{r}_n - \vec{r}'_n) f(\vec{r}'_1, \sigma'_1, \dots, \vec{r}'_n, \sigma'_n)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{P_n} \text{smal}(P_n) f(\vec{r}_1, \sigma_1, \dots, \vec{r}_n, \sigma_n) \quad (\text{simetrização da } f)$$

8

Prova do lema por indução Suponha n=1

$$F_n = \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) \delta_{\sigma_1 \sigma_1} | 0 \rangle \pm \underbrace{\langle 0 | \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) | 0 \rangle}_0$$

$$= \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) \delta_{\sigma_1 \sigma_1}$$

Suponha $n=2$

$$F_n = \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \psi_{\sigma_2}(\vec{r}_2) \psi_{\sigma_2}^+(\vec{r}_2) \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2') \delta_{\sigma_2 \sigma_2'} \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) | 0 \rangle$$

$$\mp \langle 0 | \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \psi_{\sigma_2}^+(\vec{r}_2') \psi_{\sigma_2}(\vec{r}_2) \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) | 0 \rangle$$

$$= \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2') \delta_{\sigma_1 \sigma_1'} \delta_{\sigma_2 \sigma_2'} \mp 0$$

$$\mp \langle 0 | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2') \delta_{\sigma_1 \sigma_2'} \psi_{\sigma_2}(\vec{r}_2) \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) | 0 \rangle (\mp/\mp) 0 =$$

$$= \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2) \delta_{\sigma_1 \sigma_1'} \delta_{\sigma_2 \sigma_2'}$$

$$\mp \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2') \delta_{\sigma_1 \sigma_2'} \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1') \delta_{\sigma_2 \sigma_1'} (\mp)(\mp) 0$$

$$\therefore F_2 = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2') \delta_{\sigma_1 \sigma_1'} \delta_{\sigma_2 \sigma_2'}$$

$$(\mp) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1') \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2') \delta_{\sigma_2 \sigma_1'} \delta_{\sigma_1 \sigma_2'}$$

indução

(9)

tínhamos

$$|\psi^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \int d^3r_1 \dots d^3r_n \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}^+(\vec{r}_n) \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) |0\rangle$$

faça uma troca de variáveis (e permutação) de integração (somos)

$$|\psi^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \int d^3r_1 \dots d^3r_n \psi_{\sigma_n}^+(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n) |0\rangle$$

a mudança em f pode ser escrita com $P_m f(\dots \vec{r}_1 \sigma_1 \dots \vec{r}_n \sigma_n)$

a mudança no produto $\psi_{\sigma_n}^+(\vec{r}) \dots \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}) \dots \psi_{\sigma_1}(\vec{r}) \dots$

pode ser restabelecida por

$$\text{smal}(P_m) \psi_{\sigma_n}^+(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\sigma_n}(\vec{r}_n)$$

de forma que se variássemos todas as permutações teríamos

$$|\psi^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \int d^3r_1 \dots d^3r_n \psi_{\sigma_n}^+(\vec{r}_n) \dots \psi_{\sigma_1}^+(\vec{r}_1) |0\rangle$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{P_m} \text{smal}(P_m) \cdot f(\vec{r}_1 \sigma_1 \dots \vec{r}_n \sigma_n)$$

total
de permutações

mas isto é $\psi(\vec{r}_1 \sigma_1 \dots \vec{r}_n \sigma_n)$ c.q.d

↓
toda a parte não simétrica
desaparece

10

$$\langle \psi^n | \psi^n \rangle =$$

$$\sum_{\sigma_1 \sigma_2 \dots} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} \int d\vec{r}'_1 \dots d\vec{r}'_n$$

$$\frac{1}{n!} \psi^*(\vec{r}_1 \sigma_1, \dots, \vec{r}_n \sigma_n) \psi(\vec{r}'_1 \sigma'_1, \dots, \vec{r}'_n \sigma'_n) E_n$$

$\nwarrow$ tem simetria $\downarrow$ chaves de produtos δ
 $\nearrow$ como este $\frac{1}{n!}$

mostre que

$$= \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \dots} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_n \left| \psi(\vec{r}_1 \sigma_1, \dots, \vec{r}_n \sigma_n) \right|^2 d^3 r_1 \dots d^3 r_n$$

outras relações

$$(\psi^{(n)}, K \psi^{(n)}) = \langle \psi^{(n)} | K | \psi^{(n)} \rangle$$

$$= \left(\psi^{(n)}, \sum_{\sigma_i} \int \psi_{\sigma_i}^+(\vec{r}_i) K(\vec{r}_i, \frac{\hbar}{i} \nabla_i) \psi_{\sigma_i}(\vec{r}_i) d^3 r_i \psi^{(n)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \int \psi^*(\vec{r}_1 \sigma_1, \dots, \vec{r}_n \sigma_n) K(\vec{r}_i, \frac{\hbar}{i} \nabla_i) \psi(\vec{r}_1 \sigma_1, \dots, \vec{r}_n \sigma_n)$$

$$d^3 r_1 \dots d^3 r_n$$

$$\text{se } \langle \vec{r}'_1 \sigma'_1 \vec{r}'_2 \sigma'_2 | V | \vec{r}''_1 \sigma''_1 \vec{r}''_2 \sigma''_2 \rangle = V(\vec{r}'_1, \vec{r}''_1) \delta(\vec{r}'_2 - \vec{r}''_2) \delta_{\sigma'_1 \sigma''_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma''_2}$$

$$\text{então } (\psi^{(n)}, V \psi^{(n)}) = \langle \psi^{(n)} | V | \psi^{(n)} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \left| \psi(\vec{r}_1 \sigma_1, \dots, \vec{r}_n \sigma_n) \right|^2 V(\vec{r}_i, \vec{r}_i) d^3 r_1 \dots d^3 r_n$$