AULA 22

Equações de Onda Relativística

- A ideia é obter uma equação de onda que valha p/ partículas viajando com velocidade próxima a da luz

- É possível obter tal extensão da equação de Schrödinger de várias formas (todas consistentes com as equações de transformação de Lorentz da teoria da relatividade especial)

- Um ponto essencial destas equações de onda relativísticas é que spin nasce naturalmente desta equações e não é adicionado a elas como Pauli fez com a eq. de Schrödinger.

- Trataremos 2 equações relativísticas $\begin{cases} \text{spin } 0 \quad \text{méson } \pi \\ \quad \downarrow \\ \text{Schrodinger} \\ \text{spin } 1/2 \quad \text{elétron} \\ \quad \downarrow \\ \text{Dirac} \end{cases}$

- Nesta primeira parte não estabeleceremos a invariança de Lorentz

Equação de Schrödinger Relativística

$$E = \frac{P^2}{2m} \qquad \text{relação não relativística}$$

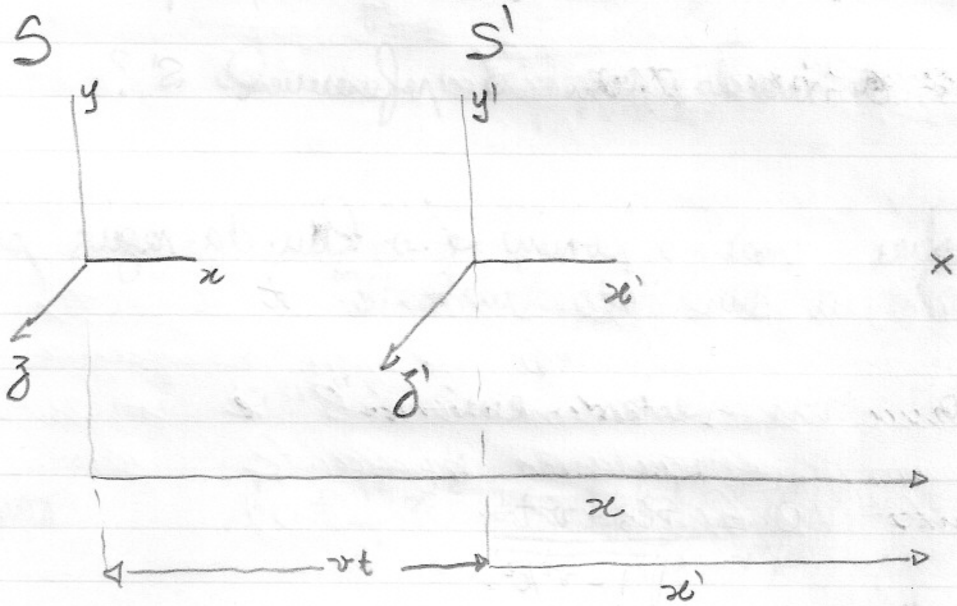
$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \qquad \text{relação relativística}$$

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = mc^2\sqrt{1 + \frac{P^2}{m^2c^2}} \simeq mc^2\left(1 + \frac{P^2}{2m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{P^2}{2m}$$

noto tb $E = E' + mc^2$ $\quad \underbrace{\cancel{E'^2}}_{\text{despreza}} + 2mc^2E' + \cancel{m^2c^4} = c^2p^2 + \cancel{m^2c^4}$ $\quad E' = \frac{P^2}{2m}$

Transformações de Lorentz

- Luz → $\begin{cases} \text{mesma velocidade, } \forall \text{ frequências} \\ \text{mesma velocidade } \forall \text{ fonte } (\forall \text{ velocidade}) \\ \text{Eletromagnetismo} \rightarrow c \text{ cte} \end{cases}$



Galilei

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

consequências: se x é um foton viajando com velocidade c com respeito a S, S' vê este foton viajando com velocidade $c-v$

Lorentz

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t - v/c^2 x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

se $\boxed{x = ct}$ $\quad x' = \dfrac{c-v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\, t$, $\quad t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}ct}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad \boxed{x' = ct'}$

As leis da física são iguais em todos os referenciais

princípio da relatividade

a regra de Schrödinger era simples

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad p \to -i\hbar\vec{\nabla}$$

partícula livre $\quad E = \dfrac{p^2}{2m}$ (não relativística)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi$$

partícula livre $\quad E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -\hbar^2c^2\nabla^2\psi + m^2c^4\psi$$

a solução desta equação é do tipo

$$\exp\left(i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right)$$

autofunções de
E c/ autovalor $\hbar\omega$
$\vec{p}$ c/ autovalor $\hbar\vec{k}$

que sendo inserido na equação da energia

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2c^2k^2 + m^2c^4$$

$$\boxed{\hbar\omega = \pm\sqrt{\hbar^2c^2k^2 + m^2c^4}}$$

no momento tomaremos só a solução com sinal positivo.
retornaremos p/ a solução com sinal negativo depois

na equação de Schrodinger propomos uma forma

para densidade de carga (na Eq. Schrodinger, Probabilidade) e corrente (de probabilidade)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

$$\rho(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)|^2$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - (\vec{\nabla}\Psi)^*\Psi\right]$$

Schiff chama $\rho(\vec{r},t) = P(\vec{r},t)$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{S}(\vec{r},t)$$

a Equação $\frac{\partial}{\partial t}P(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}(\vec{r},t) = 0$ é

invariante mediante transformação de Lorentz

tome

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\hbar^2c^2\nabla^2\Psi + m^2c^4\Psi$$

multiplique por $\bar{\Psi}$ (Ψ^* do Schiff)

$$-\hbar^2\bar{\Psi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\bar{\Psi}\nabla^2\Psi + m^2c^4\bar{\Psi}\Psi$$

tome o complexo conjugado $-\hbar^2\Psi\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\Psi\nabla^2\bar{\Psi} + m^2c^4\Psi\bar{\Psi}$

subtraia uma da outra $\hbar^2\left[\Psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\right] = \hbar^2c^2\left[\Psi\nabla^2\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\nabla^2\Psi\right]$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t} - \bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right] = c^2\vec{\nabla}\cdot\left[\Psi\vec{\nabla}\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\vec{\nabla}\Psi\right]$$

p/ $\vec{S}$ ficar com a mesma expressão não relativística basta multiplicar ambos os lados por $\frac{-\hbar}{2mic^2}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\right)}_{p(\vec{r},t)}+\vec{\nabla}\cdot\underbrace{\frac{\hbar^2}{2mi}\left(\bar{\Psi}\vec{\nabla}\Psi-\bar{\Psi}\vec{\nabla}\Psi\right)}_{\vec{S}(\vec{r},t)}$$

- $P(\vec{r},t)$ não é necessariamente positivo e $\therefore$ não pode ser interpretado como densidade de probabilidade (deve dar $\rho(\vec{r},t)$ no limite não relativístico)

- Pode, entretanto, ser multiplicado por e e daí ser interpretado como densidade de carga (esta pode ser positiva ou negativa)

Potenciais eletromagnéticos

Considerando que ϕ e $\frac{1}{c}\vec{A}$ possuem as mesmas propriedades de transformação de Lorentz que E e P, a expressão relativística incluindo potenciais pode ser do tipo:

analogia c/ $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\phi$

$$(E - e\phi)^2 = (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2c^4$$

p/ uma partícula com carga $\underline{\underline{e}}$

tomando $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$

temos:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\psi = (-i\hbar c\vec{\nabla} - e\vec{A}).(-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})\psi + m^2c^4\psi$$

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - i\hbar e\frac{\partial\phi}{\partial t} - i\hbar e\phi\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar e\phi\frac{\partial}{\partial t} + e^2\phi^2\right)\psi =$$

$$\left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + i\hbar ec\vec{\nabla}.\vec{A} + i\hbar ec\vec{A}.\vec{\nabla} + i\hbar ec\vec{A}.\vec{\nabla} + e^2A^2\right)\psi + m^2c^4\psi$$

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2ie\hbar\phi\frac{\partial}{\partial t} - ie\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} + e^2\phi^2\right)\psi =$$

$$= \left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + 2ie\hbar c\vec{A}.\vec{\nabla} + ie\hbar c\vec{\nabla}.\vec{A} + e^2A^2 + m^2c^4\right)\psi$$

Conexão c/ a equação de Schrodinger não relativística

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{ie\hbar}{mc}A.\vec{\nabla} + \frac{ie\hbar}{2mc}\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 + e\phi\right)\psi$$

Substitua na equação relativística $\psi(r,t)$ por $\psi'(r,t)\,e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}$

note que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{i m c^2}{\hbar} \psi' \right) e^{\frac{-i m c^2 t}{\hbar}}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} - \frac{i m c^2}{\hbar} \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{i m c^2}{\hbar} \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi' \right) e^{\frac{-i m c^2 t}{\hbar}}$$

considere agora que $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'$ é de mesma ordem

que $e\phi\psi'$ e que ambos são muito menores

que $mc^2 \psi'$

A Equação Relativística (sem cortes) fica

zero $\left(\hbar^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \psi \ll i\hbar \frac{\partial}{\partial t} mc^2 \psi\right)$ — cancela c/ lado oposto

$$\cancel{-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2}} + 2i\hbar (mc^2) \frac{\partial}{\partial t} \psi' + \cancel{m^2 c^4 \psi'}$$

zero $\left(e\phi\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' \ll mc^2 e\phi \psi'\right)$ — zero (compara c/ mc^2) — zero ($\ll e\phi mc^2 \psi'$)

$$\cancel{- 2ie\hbar\phi \frac{\partial \psi'}{\partial t}} - 2 mc^2 e\phi \psi' \cancel{- ie\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi'} \cancel{+ e^2 \phi^2 \psi'}$$

cancela c/ lado oposto

$$= \left\{ -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + 2ie\hbar c \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + ie\hbar c (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + e^2 A^2 + \cancel{m^2 c^4} \right\} \psi'$$

dividindo tudo por $2mc^2$, temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{ie\hbar}{mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{ie\hbar}{mc} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 + e\phi \right) \psi'$$

que é a Equação de Schrodinger não relativística

- não é possível incluir spin (matrizes de Pauli) sem destruir a invariança da teoria. A equação que derivamos serve apenas p/ partículas de spin zero.
- a equação $(E-e\phi)^2 = (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + (mc^2)^2$ indica que não é possível adicionar arbitrariamente termos de energia potencial (digamos uma perturbação) antes era fácil bastava adicionar V em H. Agora é preciso verificar se V transforma como um quadrivetor. Se não, deve-se buscar o que está faltando e incluir de forma semelhante como fizemos com $e\phi$ e $\frac{\vec{A}}{c}$. Se for invariante com respeito a transformações de Lorentz, simplesmente trate como se fosse o mc^2

Note que se em $(E-e\phi)^2 = (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2c^4$
$\downarrow$
tivessemos usado $E'+mc^2$

$$(E'-e\phi)^2 + 2mc^2(E'-e\phi) + \cancel{m^2c^4} = (c\vec{p}-e\vec{A})^2 + \cancel{m^2c^4}$$

$$E' = \frac{(E'-e\phi)^2}{2mc^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{c\vec{p} - e\vec{A}}{c}\right)^2 + e\phi$$ se desprezar o primeiro termo obtém a relação clássica

Separação da Equação (Suponha $\vec{A}$ e ϕ independentes do tempo)

define $\Psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})\, e^{-iEt/\hbar}$ substituindo na equação de Schrodinger relativística e reagrupando

$$(E - e\phi)^2 u = [-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + 2 i e\hbar c\, \vec{A}\cdot\vec{\nabla}$$

$$+ i e\hbar c (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + e^2 A^2 + m^2 c^4] u$$

se $\vec{A} = 0$ e $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$

$$\left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4\right) u(\vec{r}) = \left(E - e\phi(r)\right)^2 u(\vec{r})$$

Se trocarmos $u(\vec{r})$ por $R(r)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

temos:

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] R = \frac{(E - e\phi)^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} R$$

$$\ell = 0, 1, 2 \ldots$$

Esta equação cai na não relativística se

escrevermos $E = E' + mc^2$

e desprezarmos E' e $e\phi$ quando comparados com mc^2