AULA 24

Equação relativística de DIRAC

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r},t) = H \psi(\vec{r},t)$$

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2$$

Se a equação é primeira derivada no tempo tem que ser primeira " " na posição

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta mc^2 \right) \psi = 0$$

$$\left(E - c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta mc^2 \right) \psi = 0$$

Busca por $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e β

Equações de Hamilton-Jacobi

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}}$$

Se H descreve uma partícula livre então

H não depende da posição (se dependesse $\dot{p}_i \neq 0$ e forças estariam agindo na partícula) e não deve depender do tempo explicitamente (a energia estaria mudando)

Assim a hipótese é que $\vec{\alpha}$ e β não dependem de $\vec{r}$ e t (e nem de $\vec{p}$ e E, pois se dependessem a equação não seria linear com respeito às derivadas em t e $\vec{r}$ - hipótese inicial)

Assim $\vec{\alpha}$ e β comutam com $\vec{r}$, t, $\vec{p}$ e E

Isto não quer dizer que $\vec{\alpha}$ e β são números, pois $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ e β podem não comutar entre si

Podemos aprender mais sobre $\vec{\alpha}$ e β, pedindo que ψ da equação de onda acima, seja tb solução da equação

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi$$

ou

$$E^2 \psi = \left(c^2 p^2 + m^2 c^4\right)\psi$$

p/ obter isto multiplicamos nossa equação

$$\left(E - c\vec{\alpha}.\vec{p} - \beta mc^2\right)\psi = 0$$

por $E + c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2$ pela esquerda

$$\Big\{ E^2 - E\left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2\right) + \left(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2\right)E$$
$$-\left(c\vec{\alpha}.\vec{p}\right)\left(c\vec{\alpha}.\vec{p}\right) - c\left(\vec{\alpha}.\vec{p}\right)\beta mc^2 - \beta mc^2 \vec{\alpha}.\vec{p} - \beta mc^2 \beta mc^2 \Big\}\psi = 0$$

o 2º e 3º termo cancelam, pois $c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2$ não dependem de t e $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

$$\Big\{ E^2 - c^2 \Big[\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) p_x p_y$$

$$+ (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y) p_y p_z + (\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z) p_z p_x \Big]$$

$$- m^2 c^4 \beta^2$$

$$- mc^3 \Big[(\alpha_x \beta + \beta \alpha_x) p_x + (\alpha_y \beta + \beta \alpha_y) p_y + (\alpha_z \beta + \beta \alpha_z) p_z \Big] \Big\} \Psi = 0$$

compare isto com

$$(E^2 - c^2 p^2 - m^2 c^4) \Psi = 0$$

e conclua

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1$$

$$\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = \alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = \alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z = 0$$

$$\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = \alpha_y \beta + \beta \alpha_y = \alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0$$

consts que anticomutam não podem ser números (estes comutam)

Como H é Hermiteana as α_i e β devem ser quadradas. Achemos uma representação onde uma delas é diagonal. Elas não podem ser todas diagonais? Não. porque se fosse comutariam entre si e queremos que anticomutem.

Procuremos pelas de menor ordem.

O quadrado de todas estas matrizes é 1 ∴

Se $AX = \lambda X \rightarrow A^2 X = \lambda^2 X = 1 \therefore \lambda = \pm 1$

Escolha arbitrária: β diagonal

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ apenas para

$$\begin{array}{c} n \left\{ \vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}} \right. \\ m \left\{ \vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}} \right. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots -1 \end{bmatrix}$$

suponha n +1
e m -1

Quanto vale $\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = ?$ vale zero

tome o elemento pl

$$\sum_k \left(\alpha_{x_{pk}} \beta_{kl} + \beta_{pk} \alpha_{x_{kl}} \right) = \alpha_{x_{pl}} \beta_l + \beta_p \alpha_{x_{pl}}$$

$$\downarrow$$

$$\beta_{kl} = \pm \delta_{kl} = \beta_l \delta_{kl}$$

$$= \alpha_{x_{pl}} (\beta_l + \beta_p) = 0 \quad \therefore \quad \text{se } \beta_l = \beta_p \rightarrow 2\beta_l \neq 0 \therefore \alpha_{x_{lp}} = 0$$

$$\text{se } \beta_l \neq \beta_p \rightarrow \beta_l + \beta_p = 0 \quad \alpha_{x_{lp}} \neq 0$$

pode ser

$$\alpha_x = \begin{array}{c} n \left\{ \vphantom{1} \right. \\ \\ m \left\{ \vphantom{1} \right. \end{array} \begin{bmatrix} \underbrace{0}_{n} & n\left\{ \underbrace{\alpha_{x^1}}_{m} \right. \\ m\left\{ \underbrace{\alpha_{x^2}}_{n} \right\}^m & \underbrace{0}_{m} \end{bmatrix}$$

lembre que $\alpha_x \alpha_x = 1$

a forma tb vale p/ α_y e α_z

$$\therefore \underset{n \times m}{\alpha_{x^1}} \underset{m \times n}{\alpha_{x^2}} = \underset{n \times n}{1} \quad \underset{m \times n}{\alpha_{x^2}} \underset{n \times m}{\alpha_{x^1}} = \underset{m \times m}{1}$$

Suponha
$n=1 \quad m=2$

$$\alpha_{x^1} = \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}} \qquad \alpha_{x^2} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}}$$

$$\alpha_{x^1}\,\alpha_{x^2} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1$$

$$\underset{2\times 1}{\alpha_{x^2}}\;\underset{1\times 2}{\alpha_{x^1}} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}\cdot b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com perdia a eq. acima

ou seja $\begin{matrix} a_{11}b_{11} = 1 \\ a_{12}b_{22} = 1 \end{matrix} \;>\; a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 2$ e não 1!

$\therefore$ $n=1$ e $m=2$ não serve

mostre que $n=2$ e $m=1$ tb não serve

Tentemos $n=m=1$ e depois $n=m=2$ (Ranks maiores correspondendo a partículas com spin maiores que 1/2)

Caso $n=m=1$ Já vimos na pag 164, cap. 3 do Sakurai que

$$\left.\begin{matrix} \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \\ \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0 \\ \sigma_z\sigma_x + \sigma_z\sigma_x = 0 \\ \\ \sigma_i^2 = 1 \end{matrix}\right\}$$

na ocasião $\{\sigma_\lambda, \sigma_\gamma\} = 2\delta_{\gamma\lambda}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_i$$

outras propriedades

$\sigma_1\sigma_2 = +i\sigma_3$

$\sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3$

etc

"Cohen" Volume 1, Complemento A_{IV} mostra que

se $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{\forall}}$

$$M = a_0 I + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$$

onde $a_0 = \frac{1}{2} Tr(M)$

$$\vec{a} = \frac{1}{2} Tr(M\vec{\sigma})$$

isto é $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e I formam uma base no espaço das matrizes 2×2

- mas precisamos de 4 matrizes anticomutando entre si $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ e β; as matrizes de Pauli representam 3 pois a matriz unidade $\underline{\underline{\text{comuta}}}$ c/ todas elas.

Tome M e veja se ela anticomuta com σ_x, σ_y e σ_z ao mesmo tempo

$$\{a_0 I + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3, \sigma_1\}$$

$$2a_0\sigma_1 + 2a_1\sigma_1^2 + a_2\underbrace{(\sigma_2\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)}_{0} + a_3\underbrace{(\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3)}_{0}$$

$= 2a_0\sigma_1 + 2a_1 \mathbb{1}$ p/ que isto seja $\underline{\underline{0}}$ é preciso que $a_0 = a_1 = 0$

e assim sistematicamente podemos concluir que a_2 e a_3 tb precisariam ser zeros e não conseguiríamos construir $M \neq 0$ que anticomute com σ_1, σ_2 e σ_3 $\therefore$ esqueça $n=m=1$

Tentemos $\underline{\underline{n = m = 2}}$

p/ simplificar tomaremos $\alpha_{x^1} = \alpha_{x^2}$
$\alpha_{y^1} = \alpha_{y^2}$
$\alpha_{z^1} = \alpha_{z^2}$

consequentemente $\alpha_{x^1}\alpha_{x^2} = 1$ fica $\alpha_{x^1}^{2} = 1$

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{x^1} \\ \alpha_{x^1} & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{y^1} \\ \alpha_{y^1} & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{z^1} \\ \alpha_{z^1} & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0 \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{x^1}\alpha_{y^1} & 0 \\ 0 & \alpha_{x^1}\alpha_{y^1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{y^1}\alpha_{x^1} & 0 \\ 0 & \alpha_{y^1}\alpha_{x^1} \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \quad \alpha_{x^1}\alpha_{y^1} + \alpha_{y^1}\alpha_{x^1} = 0$$

isto sugere que podemos

identificar $\alpha_{x^1} = \sigma_1$
$\alpha_{y^1} = \sigma_2$
$\alpha_{z^1} = \sigma_3$

e assim

$$\beta \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ compactamente

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}$$

↑ cada elemento é uma matriz 2x2

Solução da partícula livre

Se a equação é escrita em termos de matrizes 4x4, como é o ψ em

$$(E - c\vec{\alpha}.\vec{p} - \beta mc^2)\psi = 0$$

Que tal:

$$\psi(\vec{r}.t) = \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}.t) \\ \psi_2(\vec{r}.t) \\ \psi_3(\vec{r}.t) \\ \psi_4(\vec{r}.t) \end{bmatrix}$$

temos um problema * de 4 equações diferenciais de primeira ordem em t e $\vec{r}$ acopladas p/ resolver

* lineares e homogêneas

tentemos uma solução do tipo p/ o caso partícula livre

$$\psi_\gamma(\vec{r},t) = u_\gamma \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

onde u_γ são numeros e $\gamma = 1, 2, 3$ e 4

escolhemos estas funções porque elas são autofunções de E e $\vec{p}$ c/ autovalores $\hbar\omega$ e $\hbar\vec{k}$, respectivamente

ψ_γ, devem portanto ser solução de

$$(E - c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta mc^2)\psi = 0$$

Substituindo temos

$$\left\{\begin{pmatrix} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} & & & \\ & i\hbar\frac{\partial}{\partial t} & & \\ & & i\hbar\frac{\partial}{\partial t} & \\ & & & i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\right.$$

$$- c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & & & \\ & -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & & \\ & & -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & \\ & & & -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$\left. - c\alpha_y p_y - c\alpha_z p_z - \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -mc^2 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$p_x \parallel$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \hbar w & & & \\ & \hbar w & & \\ & & \hbar w & \\ & & & \hbar w \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar k_x & & & \\ & \hbar k_x & & \\ & & \hbar k_x & \\ & & & \hbar k_x \end{pmatrix} \right.$$

$p_y \parallel$

$$- c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar k_y & & & \\ & \hbar k_y & & \\ & & \hbar k_y & \\ & & & \hbar k_y \end{pmatrix}$$

$p_z \parallel$

$$- c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar k_z & & & \\ & \hbar k_z & & \\ & & \hbar k_z & \\ & & & \hbar k_z \end{pmatrix}$$

$$\left. - \begin{pmatrix} mc^2 & & & \\ & mc^2 & & \\ & & -mc^2 & \\ & & & -mc^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \cancel{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}} = 0$$

$$\begin{bmatrix} E - mc^2 & 0 & -cp_z & -c(p_x - ip_y) \\ 0 & E - mc^2 & -c(p_x + ip_y) & +cp_z \\ -cp_z & -c(p_x - ip_y) & E + mc^2 & 0 \\ -c(p_x + ip_y) & +cp_z & 0 & E + mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 0$$

Equação homogênea só tem solução se det $= 0$

$\det = (E^2 - m^2c^4 - c^2p^2)^2 = 0$ então $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$