

25/02 aula

O operador que estamos diagonalizando é Hermitiano...
4 soluções L.I.
temos dois valores p/ E

$$E_{\pm} = \pm (c^2 p^2 + m^2 c^4)^{1/2}$$

e $\therefore$ duas soluções linearmente independentes para cada valor de E

$$(E - mc^2) u_1 - c p_3 u_3 - c(p_x - i p_y) u_4 = 0$$

$$(E - mc^2) u_2 - c(p_x + i p_y) u_3 + c p_3 u_4 = 0$$

$$-c p_3 u_1 - c(p_x - i p_y) u_2 + (E + mc^2) u_3 = 0$$

$$-c(p_x + i p_y) u_1 + c p_3 u_2 + (E + mc^2) u_4 = 0$$

Reescrevendo

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 u_1 + 0 u_2 - \frac{c p_3}{E - mc^2} u_3 - \frac{c(p_x - i p_y)}{E - mc^2} u_4 = 0 \\ 0 u_1 + 1 u_2 - \frac{c(p_x + i p_y)}{E - mc^2} u_3 + \frac{c p_3}{E - mc^2} u_4 = 0 \\ -\frac{c p_3}{E + mc^2} u_1 - \frac{c(p_x - i p_y)}{E + mc^2} u_2 + 1 u_3 + 0 u_4 = 0 \\ -\frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} u_1 + \frac{c p_3}{E + mc^2} u_2 + 0 u_3 + 1 u_4 = 0 \end{array} \right.$$

- Quando fazemos E igual a um dos autovalores existentes, o que se espera das quatro equações acima?

Resposta: Elas ficam linearmente dependentes

Isola-se a dependência linear, escrevendo 3 das incógnitas em função da quarta incógnita e reduzindo o

sistema de 4 equações p/ 3 equações. Resolve-se este sistema e adota o vetor em questão a menos de um fator (a quarta incógnita) que é obtido por normalização (a menos de um fator de fase)

E se a raiz for duplamente degenerada. Neste caso, mediante substituição do subvalor, você não consegue 3 eq. l.i., mas apenas 2 equações l.i. Isto significa que o seu vetor pode ser escrito em função das duas incógnitas e conseqüentemente a solução é um subespaço bidimensional. Você escolhe arbitrariamente um vetor e obter o outro obrigando ortogonalidade

Vamos usar as duas primeiras p/ $E = E_-$

CASO $E = E_-$

Valores obtidos

Origem

Escolha Arbitrária

$$u_3 = 1 \quad u_4 = 0$$

$$u_1 = \frac{CP_z}{E_- - mc^2} \quad u_2 = \frac{C(P_x + iP_y)}{E_- - mc^2}$$

1ª e 2ª equações

$$u_3 = 0 \quad u_4 = 1$$

$$u_1 = \frac{C(P_x - iP_y)}{E_- - mc^2} \quad u_2 = \frac{-CP_z}{E_- - mc^2}$$

1ª e 2ª equações

CASO $E = E_+$

$$u_3 = \frac{CP_z}{E_+ + mc^2} \quad u_4 = \frac{C(P_x + iP_y)}{E_+ + mc^2}$$

3ª e 4ª equações

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 0$$

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 1$$

$$u_3 = \frac{C(P_x - iP_y)}{E_+ + mc^2} \quad u_4 = \frac{-CP_z}{E_+ + mc^2}$$

3ª e 4ª equações

nosso auto valores são

limite não relativístico

$$E = E_+ = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

$$\psi_1 = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E_+ + m c^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_+ + m c^2} \end{pmatrix} = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sim \frac{v}{c} = 0 \\ \frac{v}{c} = 0 \end{pmatrix}$$

normalizarmos $\left\{ 1 + \frac{c^2 p^2}{(E_+ + m c^2)^2} \right\}^{-1/2}$

$\hookrightarrow \psi + \bar{\psi} = 1$

$$\psi_2 = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + m c^2} \\ \frac{-c p_z}{E_+ + m c^2} \end{pmatrix} = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sim v/c \approx 0 \\ \sim v/c \approx 0 \end{pmatrix}$$

$$E = E_- = -\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

$$\psi_3 = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} \frac{c p_z}{E_- - m c^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_- - m c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} \sim v/c = 0 \\ \sim v/c = 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_4 = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - i p_y)}{E_- - m c^2} \\ \frac{-c p_z}{E_- - m c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \begin{pmatrix} \sim v/c \\ \sim v/c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se tomarmos $\vec{\sigma}' = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ vemos $\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}'$ e ppin

note que os autovalores no limite não relativístico são autovalores de σ_z : começo da interpretação de ppin.

* Observação 1: p/ocaso $E = E_-$ mostra os resultados obtidos na 3ª equação (e mostre que a solução satisfaz esta equação)

$$-\frac{CP_z}{E_+ + mc^2} \times \frac{CP_z}{E_- - mc^2} - \frac{C(P_x + iP_y)}{E_+ + mc^2} \times \frac{C(P_x + iP_y)}{E_- - mc^2} + 1 = 0$$

$$-\frac{C^2 P_z^2}{E_+^2 - m^2 c^4} + \frac{-C^2 (P_x^2 + P_y^2)}{E_+^2 - m^2 c^4} + 1 = 0$$

$$\frac{-C^2 P^2}{C^2 P^2 + m^2 c^4 - m^2 c^4} + 1 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{correto}$$

* Observação 2: lembre que tomamos a solução que diagonalizava β

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e na base de autovalores de } \beta$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

procuramos pela solução da equação de Dirac

$$\psi = \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t) \left\{ u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

defina $\mathcal{O} = \frac{1}{2} \hbar (\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{p}})$ onde $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \vec{\sigma}'(\text{shift})$

mostre que $[H, \mathcal{O}] = 0$ com $H = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$

$$[c \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \mathcal{O}] + [\beta mc^2, \mathcal{O}]$$

$$= [c \alpha_x p_x + c \alpha_y p_y + c \alpha_z p_z, \frac{1}{2} \hbar \Sigma_x p_x + \frac{1}{2} \hbar \Sigma_y p_y + \frac{1}{2} \hbar \Sigma_z p_z]$$

$$+ \frac{\hbar mc^2}{2} [\beta, \Sigma_x p_x + \Sigma_y p_y + \Sigma_z p_z] = \frac{c \hbar}{2} \left\{ p_x^2 [\alpha_x, \Sigma_x] + p_y^2 [\alpha_y, \Sigma_y] + p_z^2 [\alpha_z, \Sigma_z] \right.$$

$$+ p_x p_y [\alpha_x, \Sigma_y] + p_y p_x [\alpha_y, \Sigma_x] + p_x p_z \left\{ [\alpha_x, \Sigma_z] + [\alpha_z, \Sigma_x] \right\}$$

$$+ p_y p_z \left\{ [\alpha_y, \Sigma_z] + [\alpha_z, \Sigma_y] \right\} \left. \right\} + \frac{\hbar^2 mc^2}{2} \left\{ p_x [\beta, \Sigma_x] + p_y [\beta, \Sigma_y] + p_z [\beta, \Sigma_z] \right\}$$

mas $[\alpha_x, \Sigma_x] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{vale p/ y e z}$$

$$[\beta, \Sigma_x] = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{asim } [H, Q] = \frac{c\hbar}{2} \left(P_x P_y \left\{ [\alpha_x, \Sigma_y] + [\alpha_y, \Sigma_x] \right\} + P_x P_z \left\{ [\alpha_x, \Sigma_z] + [\alpha_z, \Sigma_x] \right\} \right. \\ \left. + P_y P_z \left\{ [\alpha_y, \Sigma_z] + [\alpha_z, \Sigma_y] \right\} \right)$$

note entretanto que

$$[\alpha_x, \Sigma_y] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_x \sigma_y & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \sigma_x \\ \sigma_y \sigma_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_x, \sigma_y] \\ [\sigma_x, \sigma_y] & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_z \\ i\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\alpha_y, \Sigma_x] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \sigma_x \\ \sigma_y \sigma_x & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_x \sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_y, \sigma_x] \\ [\sigma_y, \sigma_x] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_z \\ -i\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{asim } [\alpha_x, \Sigma_y] + [\alpha_y, \Sigma_x] = 0$$

autoestados de Q pto autoestados de H

$$\boxed{[H, Q] = 0}$$

O que acontece com $[H, \Sigma_z] = ?$

$$[c \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \Sigma_z] + [\beta mc^2, \Sigma_z] = c p_x [\alpha_x, \Sigma_z] + c p_y [\alpha_y, \Sigma_z] + c p_z [\alpha_z, \Sigma_z] + mc^2 [\beta, \Sigma_z]$$

Vimos que $[\alpha_z, \Sigma_z] = [\beta, \Sigma_z] = 0$ mas

$$[\alpha_x, \Sigma_z] = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_x, \sigma_z] \\ [\sigma_x, \sigma_z] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_y \\ i\sigma_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\alpha_y, \Sigma_z] = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_y, \sigma_z] \\ [\sigma_y, \sigma_z] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_x \\ -i\sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [H, \Sigma_z] = i c \begin{pmatrix} 0 & p_y \sigma_x - p_x \sigma_y \\ p_y \sigma_x - p_x \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

O spin não é um bom número quântico em qualquer direção! No limite não relativístico o acoplamento entre as componentes de $+mc^2$ e $-mc^2$ ficam desprezíveis e vale $[H, \sigma_z] = 0$

↑
bloco superior
esquerdo de $[H, \Sigma_z]$

Demanda de Carga e Demanda de Corrente

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi + i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi - \beta mc^2 \psi = 0$$

tome o adjunto

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger - i\hbar c (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha} - mc^2 \psi^\dagger \beta = 0$$

tome $\psi^\dagger$ vezes a primeira, a segunda vezes ψ e subtraia

$$i\hbar \left\{ \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \right) \psi \right\} + i\hbar c \left\{ \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + (\vec{\nabla} \psi^\dagger \cdot \vec{\alpha}) \psi \right\} - mc^2 (\psi^\dagger \beta \psi - \psi^\dagger \beta \psi) = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + i\hbar c \vec{\nabla} \cdot \left\{ \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \right\} = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{r}, t) + i\hbar \vec{\nabla} \cdot (c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) = 0$$

$P(\vec{r}, t) = \psi^\dagger \psi$ → tem a forma não relativística

$\vec{S}(\vec{r}, t) = c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$ → se reduz a forma não relativística qdo $\frac{v}{c} \ll 1$

↓
Problema 6

no caso não relativístico vimos que

$$\vec{J} \text{ poderia ser escrito } \frac{\hbar}{m} \text{Im } \psi^* \nabla \psi$$

$$= \text{Re } \psi^* \left(\frac{-i\hbar \nabla \psi}{m} \right)$$

$$= \text{Re } \psi^* \frac{\vec{p}}{m} \psi = \text{Re } \psi^* \vec{v} \psi$$

o que sugere que $\vec{v}$ deve ser o operador velocidade da partícula

Podemos fazer isso via enfoque de Heisenberg

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (xH - Hx)$$

$$\text{onde } H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar} c (\vec{\alpha} \cdot x\vec{p} - \vec{\alpha} \cdot (\vec{p}x))$$

$$= \frac{1}{i\hbar} c \left(\alpha_x x p_x - \alpha_x p_x x + \underbrace{\alpha_y x p_y - \alpha_y p_y x}_{0} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} c \alpha_x \underbrace{(x p_x - p_x x)}_{i\hbar} = c \alpha_x$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \frac{dx}{dt} | \psi_1 \rangle &= c \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c p_x}{E_+ + mc^2} & \frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c p_x / (E_+ + mc^2) \\ c(p_x + i p_y) / (E_+ + mc^2) \end{pmatrix} \\ &= c \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + mc^2} & \frac{c p_x}{E_+ + mc^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_x}{E_+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix} = c \left[\frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + mc^2} + \frac{c(p_x + i p_y)}{E_+ + mc^2} \right] \\ &= \frac{2c^2 p_x}{E_+ + mc^2} \xrightarrow[\text{aprox.}]{E_+ \gg mc^2} p_x / m \end{aligned}$$

Potenciais Eletromagnéticos

Como introduzir os potenciais eletromagnéticos em

$$(E - c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta mc^2)\psi = 0$$

que tal

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E - e\phi \\ c\vec{p} &\rightarrow c\vec{p} - e\vec{A} \end{aligned}$$

$$(E - e\phi - \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) - \beta mc^2)\psi = 0$$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

Agora gostaríamos que ψ fosse solução de uma equação próxima de:

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2ie\hbar \phi \frac{\partial}{\partial t} - ie\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + e^2 \phi^2 \right) \psi$$

$$= \left[-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + 2ie\hbar c \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + ie\hbar c (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + e^2 A^2 + m^2 c^4 \right] \psi$$

ou ainda de

$$\left((E - e\phi)^2 - (c\vec{p} - e\vec{A})^2 - m^2 c^4 \right) \psi = 0$$

Podemos conseguir isto multiplicando a Eq. de Dirac
C/ potenciais eletromagnéticos pela expressão por

$$E - e\phi + \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) + \beta mc^2$$

$$\left\{ (E - e\phi)^2 - [\vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A})]^2 - \beta^2 m^2 c^4 - (E - e\phi) \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) \right. \\ \left. + \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) (E - e\phi) \right\} \psi = 0$$

os dois últimos termos existem
pois ϕ e $\vec{A}$ dependem do tempo $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

Os termos curados em $\vec{\alpha}$ e β desaparecem em
 função da escolha que fizemos p/ $\vec{\alpha}$ e β no caso
 da partícula livre

⑦ O 2º termo pode ser modificado se fizermos uso
 da relação

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{B})(\vec{\alpha} \cdot \vec{C}) = \vec{B} \cdot \vec{C} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

onde $[\vec{B}, \vec{\alpha}] = [\vec{C}, \vec{\alpha}] = 0$ mas $[\vec{B}, \vec{C}]$ pode ser $\neq 0$

problema 1

tome $\vec{B} = \vec{C} = (c\vec{p} - e\vec{A})$

$$[\vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A})][\vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A})] = (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + i \vec{\sigma} \cdot ((c\vec{p} - e\vec{A}) \times (c\vec{p} - e\vec{A}))$$

onde

$$(c\vec{p} - e\vec{A}) \times (c\vec{p} - e\vec{A}) = -ce (\vec{A} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{A}) = i\hbar ce \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\hbar ce \vec{H}$$

campo
magnético

Assim

$$[\vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A})]^2 = (c\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{H}$$

⑧ Os dois últimos termos

$$= e \vec{\alpha} \cdot (\vec{E} \vec{A} - \vec{A} \vec{E}) + ce \vec{\alpha} \cdot (\phi \vec{p} - \vec{p} \phi) = i\hbar e \vec{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$[E, \vec{p}] = 0$$

$$[\phi, \vec{A}] = 0$$

$$+ ce \vec{\alpha} \cdot (\phi \cdot i\hbar \vec{\nabla} + i\hbar \vec{\nabla} \phi)$$

Levando em ϕ e ψ

$$= i\hbar e \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + c \vec{\nabla} \phi \right) = i\hbar ce \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -i\hbar ce \vec{\alpha} \cdot \vec{E}$$

- "E"

campo
elétrico