fórmulas de recorrência

mostre que

$$\begin{cases} (s+\nu+k)\, b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma a_\nu - \dfrac{\alpha_2}{\alpha} a_{\nu-1} = 0 \\ (s+\nu-k)\, a_\nu - a_{\nu-1} - \gamma b_\nu - \dfrac{\alpha_1}{\alpha} b_{\nu-1} = 0 \end{cases}$$

isto vale

$\boxed{p/\ \nu > 0}$

vou fazer p/

p/ $\nu = 0$ (tome termo, após inserir séries nas equações)

na eq.

$$g' - g + \frac{kg}{\rho} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\rho}\right) f = 0$$

com $f = \rho^s (a_0 + \dots a_\nu \rho^\nu)$

$g = \rho^s (b_0 + \dots b_\nu \rho^\nu)$

$$s \rho^{s-1} b_0 - 0 \rho^{s-1} + k \rho^{s-1} b_0 - \frac{\alpha_2}{\alpha} 0 \rho^{s-1} + \gamma \rho^{s-1} a_0 = 0$$

$$\boxed{(s+k)\, b_0 + \gamma a_0 = 0}$$

na eq.

$$f' - f - \frac{kf}{\rho} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\rho}\right) g = 0$$

$$s \rho^{s-1} a_0 - 0 \rho^{s-1} - k \rho^{s-1} a_0 - \frac{\alpha_1}{\alpha} . 0 \rho^{s-1} - \gamma \rho^{s-1} b_0 = 0$$

$$\boxed{(s-k)\, a_0 - \gamma b_0 = 0}$$

as equações p/ a_0 e b_0 são homogêneas

$$\begin{pmatrix} \gamma & s+k \\ s-k & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\gamma^2 - (s-k)(s+k) = 0$$

$$s^2 - k^2 + \gamma^2 = 0$$

aceitável

$$\boxed{s = \pm\sqrt{k^2-\gamma^2}}$$

inaceitável

lembre que estamos com $\begin{pmatrix} r^{-1}F \\ r^{-1}G \end{pmatrix}$

$\therefore$ s precisa ser maior que 1

$$F(\rho) = f(\rho)\, e^{-\rho} = \rho^s (a_0 + a_1\rho' + \dots)\, e^{-\rho}$$

aceitaremos s um pouco menores que 1 (núcleo finito)

lembre que
$$\hbar^2 k^2 = \hbar^2 (j+1/2)^2$$

$\therefore$ p/ $j = 1/2$ $k = \pm 1$ e s pode ficar menor que 1 $(\gamma \ll 1)$

uma relação entre $\underline{\underline{a_\nu}}$ e $\underline{\underline{b_\nu}}$

tome

$$\alpha \cdot \left((s+\nu+k)\, b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma a_\nu - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_{\nu-1} \right) = 0$$

$-$

$$\alpha_2 \left((s+\nu-k)\, a_\nu - a_{\nu-1} - \gamma b_\nu - \frac{\alpha_1}{\alpha} b_{\nu-1} \right) = 0$$

e use $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha^2$

note que os $b_{\nu-1}$ e $a_{\nu-1}$ desaparecem

$$\boxed{b_\nu \left(\alpha (s+\nu+k) + \alpha_2 \gamma \right) = a_\nu \left(\alpha_2 (s+\nu-k) - \alpha \gamma \right)}$$

Estude ν grande (os termos com ν grande dominam)

assim: $b_\nu (\alpha \nu) = a_\nu (\alpha_2 \nu)$ (jogue fora $\alpha s, \alpha k, \alpha_2 s$, $\alpha_2 k, \alpha_2 \gamma, \alpha \gamma$)

$$\therefore \quad \boxed{b_\nu \alpha = a_\nu \alpha_2}$$

insira em

$$(s+\nu+k)\, b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma a_\nu - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_{\nu-1} = 0$$

ou melhor em

$$\nu b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma \frac{\alpha b_\nu}{\alpha_2} - \frac{\cancel{\alpha_2}}{\cancel{\alpha}} \frac{\cancel{\alpha} b_{\nu-1}}{\cancel{\alpha_2}}$$

$$\left(\nu + \cancel{\frac{\rho\alpha}{\alpha_2}}\right) b_\nu = 2\, b_{\nu-1}$$

$$\boxed{b_\nu = \frac{2}{\nu}\, b_{\nu-1}}$$

como $\quad b_\nu\, \alpha = a_\nu\, \alpha_2$

$$a_\nu \frac{\alpha_2}{\alpha} = \frac{2}{\nu}\, \frac{\alpha_2}{\alpha}\, a_{\nu-1}$$

$$\boxed{a_\nu = \frac{2}{\nu}\, a_{\nu-1}}$$

este é o comportamento da $e^{2\rho}$, pois

$$e^{2\rho} = 1 + 2\rho + \frac{(2\rho)^2}{2!} + \dots \frac{(2\rho)^n}{n!}.$$

$$\therefore \quad \frac{2^n}{n!} \div \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{2}{n}$$

é preciso truncar as séries

Suponha agora que $b_{n'+1} = a_{n'+1} = 0$

então tome $\nu = n'+1$ e $\nu - 1 = n'$ nas equações de recorrência

isto trunca a série

$$(s + n'+1 + k)\cancel{b_{n'+1}}^{\to 0} - b_{n'} + \gamma \cancel{a_{n'+1}}^{\to 0} - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_{n'} = 0$$

$$(s + n'+1 - k)\cancel{a_{n'+1}}^{\to 0} - a_{n'} - \gamma \cancel{b_{n'+1}}^{\to 0} - \frac{\alpha_1}{\alpha} b_{n'} = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha\, b_{n'} = -\alpha_2\, a_{n'}}$$ p/ ambas as equações

como ν começa com 1, $n' = 0, 1, 2, \ldots$

note que n' é o maior valor de ν tal que

$b_{n'} \neq 0$ mas $b_{n'+1} = 0$ e $a_{n'} \neq 0$ mas $a_{n'+1} = 0$

Assim tome $\nu = n'$ em

$$b_\nu \left(\alpha(s+\nu+k) + \alpha_2 \gamma \right) = a_\nu \left(\alpha_2 (s+\nu-k) - \alpha\gamma \right)$$

$$\boxed{b_{n'} \left(\alpha(s+n'+k) + \alpha_2 \gamma \right) = a_{n'} \left(\alpha_2 (s+n'-k) - \alpha\gamma \right)}$$

OU

$$\begin{pmatrix} +\alpha_2 & \alpha \\ \\ \alpha_2(s+n'-k)-\alpha\gamma & -(\alpha(s+n'+k)+\alpha_2\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n'} \\ \\ b_{n'} \end{pmatrix} = 0$$

eq. homogenea $\rightarrow$ det $= 0$

$$-\alpha_2\left(\alpha(s+n'+k)+\alpha_2\gamma\right) - \alpha\left(\alpha_2(s+n'-k)-\alpha\gamma\right) = 0$$

$$-2\alpha\alpha_2(s+n') + (\alpha^2-\alpha_2^2)\gamma = 0$$

$$2\alpha(s+n') = +\frac{(\alpha^2-\alpha_2^2)\gamma}{\alpha_2} = -\frac{(\alpha_2^2-\alpha^2)}{\alpha_2}\gamma$$

MAS $\alpha = (\alpha_1\alpha_2)^{1/2}$ $\therefore$ $\frac{\alpha_2^2-\alpha^2}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2} = \alpha_2-\alpha_1$

$\therefore$

$$\boxed{2\alpha(s+n') = (\alpha_1-\alpha_2)\gamma}$$

com $s = +(k^2-\gamma^2)^{1/2}$

$n' = 0, 1, \ldots$

α_1, α, e α_2 dependem de E

$\downarrow$

Quantiza!

mas $\alpha_1 = \dfrac{E + mc^2}{\hbar c}$ $\alpha_2 = \dfrac{mc^2 - E}{\hbar c}$

$$\therefore \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2E}{\hbar c}$$

e $\alpha = \dfrac{(m^2c^4 - E^2)^{1/2}}{\hbar c}$

assim $2\alpha(s + n') = (\alpha_1 - \alpha_2)\gamma$ fica

$$\rightarrow \cancel{2}(s+n') = \frac{\cancel{2}E}{\cancel{\hbar c}} \frac{\cancel{\hbar c}}{(m^2c^4 - E^2)^{1/2}} \gamma$$

$$(m^2c^4 - E^2)(s+n')^2 = E^2\gamma^2$$

$$E^2(\gamma^2 + (s+n')^2) = (s+n')^2 m^2 c^4$$

$$E = \sqrt{\frac{(s+n')^2 m^2 c^4}{\gamma^2 + (s+n')^2}}$$

$$= mc^2 \left(\frac{(s+n')^2 + \gamma^2}{(s+n')^2} \right)^{-1/2} = mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{(s+n')^2} \right)^{-1/2}$$

note que agora $s = +(k^2 - \gamma^2)^{1/2} = +((j + 1/2)^2 - \gamma^2)^{1/2}$

$k^2 = (j + 1/2)^2$

note que s agora difere de 1 do s da equação de Klein-Gordon