TEORIA DE PERTURBAÇÃO: CASO DEGENERADO (ordens superiores)

Suponha conhecido: $H_0 |m^{(0)}\rangle = E_m^{(0)} |m^{(0)}\rangle$

Se m' e $m \in D$ com dimensão g_D

$$E_m^{(0)} = E_{m'}^{(0)} = E_D$$

Matricialmente:

$$H_0 = \begin{array}{c} \\ g_D \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} E_D & & & & & \\ & E_D & & 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & E_D & & \\ & 0 & & & E_{g_D+1} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}}^{g_D}$$

Queremos resolver

$$(H_0 + \lambda V)|m\rangle = E_m |m\rangle$$

p/ m tal que $\lim_{\lambda \to 0} |m\rangle = |\ell^{(0)}\rangle = \sum_{m \in D} C_m |m^{(0)}\rangle$

matricialmente

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1g_D} & V_{1g_D+1} & \dots \\ V_{21} & V_{22} & & \vdots & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ V_{g_D 1} & \dots & & V_{g_D g_D} & & \dots \\ V_{g_D+1,1} & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

MATÉRIA Construa $P_0 = \sum_{m \in D} |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|$ DATA

$$P_1 = \mathbb{1} - P_0$$

ambos com a Base original (note arbitrariedade em D)

Escreva H nesta Base

$$H = \mathbb{1} H \mathbb{1} = H_0 + \mathbb{1} V \mathbb{1}$$

$$= H_0 + (P_0 + P_1) V (P_0 + P_1)$$

$$= H_0 + P_0 V P_0 + P_0 V P_1 + P_1 V P_0 + P_1 V P_1$$

Redefina

$$\bar{H}_0 = H_0 + P_0 V P_0 = P_0 H_0 P_0 + P_1 H_0 P_1 + P_0 V P_0$$

$$\bar{V} = P_0 V P_1 + P_1 V P_0 + P_1 V P_1$$

Diagonalize $\bar{H}_0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{note que é equivalente} \\ \text{a diagonalizar } V \text{ em } D \\ \text{pois fora de } D, \ H_0 \text{ já é diagonal} \end{array} \right\}$

Reescreva $\bar{H}_0$ e $\bar{V}$ na nova base

Basta construir $\bar{P}_0 = \sum_{l \in D} |l^{(0)}\rangle\langle l^{(0)}|$

Embora $\bar{P}_0 = P_0$ eles são escritos em bases diferentes note entretanto

$\bar{P}_1 = P_1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{além de iguais,} \\ \text{ambos são escritos} \\ \text{na mesma base} \end{array} \right.$

Assim

$$\bar{H}_0 = P_0 H_0 P_0 + P_1 H_0 P_1 + P_0 V P_0$$

$$= \underbrace{\bar{P}_0 H_0 \bar{P}_0}_{\sum_{l \in D} E_D^{(0)} |l^{(0)}\rangle\langle l^{(0)}|} + \underbrace{P_1 H_0 P_1}_{\sum_{m \notin D} E_m^{(0)} |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|} + \underbrace{\bar{P}_0 V \bar{P}_0}_{\sum_{l \in D} v_l |l^{(0)}\rangle\langle l^{(0)}|}$$

observe agora que
$$\bar{H}_0 = \sum_{l \in D} (E_D^{(0)} + v_l) |l^{(0)}\rangle\langle l^{(0)}| + \sum_{m \notin D} E_m^{(0)} |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|$$

$$\bar{H}_0 = \sum_{l \in D} E_l^{(0)} |l^{(0)}\rangle\langle l^{(0)}| + \sum_{m \notin D} E_m^{(0)} |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|$$

Dependendo de V, E_l pode não ser mais degenerado

Para ordens superiores:
Aplique caso não degenerado. Antes, reescreva $\bar{V}$

$$\bar{V} = P_0 V P_1 + P_1 V P_0 + P_1 V P_1$$

$$= \bar{P}_0 V P_1 + P_1 V \bar{P}_0 + P_1 V P_1$$

Como calcular $\bar{P}_0 V P_1$

base nova dentro de D

base nova = base antiga fora de D

$$\bar{P}_0 V P_1 = \sum_{\substack{l \in D \\ m \notin D}} |l^{(0)}\rangle\langle l^{(0)}| V |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|$$

combinação de elementos $\langle l^{(0)}|V|m^{(0)}\rangle$

insira $\mathbb{1}$: soma $\sum_{m \in D} |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|$

$$\langle l^{(0)}|V|m^{(0)}\rangle = \sum_{m} \langle l^{(0)}|m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|V|m^{(0)}\rangle$$

isto vem da diagonalização de V em D

E se a degenerescência não for quebrada?

Redefina $\bar{P}_0$ (aumente a dimensão de D incluindo kets que acoplem kets de D via $\underline{\underline{V}}$)

↓ chame de $\bar{\bar{P}}_0$

Redefina $\bar{P}_1$ (subtraia ket usado em $\bar{P}_0$)

↓ chame $\bar{\bar{P}}_1$

e comece de novo, agora com

$$\bar{\bar{H}}_0 = H_0 + \bar{\bar{P}}_0 V \bar{\bar{P}}_0$$

$$\bar{\bar{V}} = \bar{\bar{P}}_0 V \bar{\bar{P}}_1 + \bar{\bar{P}}_1 V \bar{\bar{P}}_0 + \bar{\bar{P}}_1 V \bar{\bar{P}}_1$$

diagonalize $\bar{\bar{H}}_0$

reescreva $\bar{\bar{H}}_0$ e $\bar{\bar{V}}$ na nova base

⋮

Se a degenerescência for quebrada aplique caso "não-degenerado"

OBS: É possível também redefinir P_0 da seguinte maneira

$$\bar{P}_0 = |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}| + |m'^{(0)}\rangle\langle m'^{(0)}|$$

onde agora $m \in D$ e $m' \notin D$

Dependendo da escolha, $|m'^{(0)}\rangle$ quebra a degenerescência de $|m^{(0)}\rangle$ com respeito às outras componentes de D e caso não degenerado fica aplicável.

Aplique isso no Problema 12 do Sakurai.

12. (This is a tricky problem because the degeneracy between the first and the second state is not removed in first order. See also Gottfried 1966, 397, Problem 1.) This problem is from Schiff 1968, 295, Problem 4. A system that has three unperturbed states can be represented by the perturbed Hamiltonian matrix

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 & a \\ 0 & E_1 & b \\ a^* & b^* & E_2 \end{pmatrix}$$

where $E_2 > E_1$. The quantities a and b are to be regarded as perturbations that are of the same order and are small compared with $E_2 - E_1$. Use the second-order nondegenerate perturbation theory to calculate