Segunda Lista de exercícios FI002

Data de entrega: 08 de abril de 2008

1) (D. Griffiths Problem 7.12)

Se a massa do fóton não fosse nula ($m_\gamma \neq 0$), o potencial de Coulomb seria substituido pelo potencial de Yukawa, que tem a forma

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}, \tag{1}$$

onde $\mu = m_\gamma c/\hbar$. Escolha uma função de prova e estime a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio com este potencial. Assuma $\mu a \ll 1$ e expresse a sua resposta até segunda ordem em μa_0.

2) (D. Griffiths Problem 7.13)

Suponha um sistema quântico cujo Hamiltoniano H_0 admite só dois autoestados, ψ_a (com energia E_a), e ψ_b (com energia E_b). Os autoestado são ortogonais, normalizados e não degenerados (assuma que E_a é o menor autovalor). Agora, é ligada uma perturbação H', com os seguintes elementos de matriz:

$$\langle\psi_a| H' |\psi_a\rangle = \langle\psi_b| H' |\psi_b\rangle = 0; \qquad \langle\psi_a| H' |\psi_b\rangle = \langle\psi_b| H' |\psi_a\rangle = h \tag{2}$$

a) Encontre os autovalores exatos do Hamiltoniano perturbado.

b) Estime as energias do sistema perturbado usando teoria de perturbações de segunda ordem

c) Estime a energia do estado fundamental do sistema perturbado usando o princípio variacional, com uma função de prova da forma

$$\psi = (\cos\phi)\psi_a + (\sin\phi)\psi_b, \tag{3}$$

onde ϕ é um parâmetro ajustável.

d) Compare as respostas de a), b) e c). Por quê o principio variacional é tão preciso nesse caso?

3) (Sakurai, Exercício 23 Cap 5.)

O oscilador harmônico unidimensional se encontra no estado fundamental para $t < 0$. Para $t \geq 0$ está sujeito a uma força espacialmente uniforme mas temporalmente dependente aplicada na direção x,

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}. \tag{4}$$

a) Usando teoria de perturbações dependentes do tempo até primeira ordem, obtenha a probabilidade de encontrar o oscilador no primeiro estado excitado para $t > 0$. Mostre que o limite $t \to \infty$ (τ finito) da sua expressão é independente do tempo. O resultado é razoável ou surpreendente?

b) Podem ser encontrados estados excitados?

4) (Sakurai, Exercício 30 Cap 5.)

Considere um sistema de dois níveis com $E_1 < E_2$. Existe um potencial dependente do tempo que conecta os dois níveis da seguinte forma:

$$V_{11} = V_{22} = 0, \qquad V_{12} = \gamma e^{i\omega t}, \qquad V_{21} = \gamma e^{-i\omega t} \quad (\gamma \text{ real}). \tag{5}$$

Sabemos que em $t = 0$ só o nível mais baixo está populado, ou seja, $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$.

a) Encontre $|c_1(t)|^2$ e $|c_2(t)|^2$ para $t > 0$ resolvendo extamente a equação diferencial acoplada

$$i\hbar\dot{c}_k = \sum_{n=1}^{2} V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} c_n, \quad (k = 1, 2). \tag{6}$$

b) Faça o mesmo exercício usando teoria de perturbações dependentes do tempo até a mais baixa ordem não nula. Compare as duas abordagens para valores de γ pequenos. Considere os seguintes casos separadamente: (i) ω muito diferente de ω_{21} e (ii) ω próximo de ω_{21}.

Resposta para o item a): (Formula de Rabi)

$$\begin{aligned}
|c_2(t)|^2 &= \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2 + (\omega - \omega_{21})^2/4} \sin^2 \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4} \right]^{1/2} t \right\}, \\
|c_1(t)|^2 &= 1 - |c_2(t)|^2 .
\end{aligned}$$

5) Teorema de Hellmann-Feynman

Se $H(\lambda)$ depende de um parâmetro λ e se $\psi_n(\lambda)$ é um autovetor de $H(\lambda)$ normalizado, prove o teorema de Hellmann-Feynman

$$\frac{dE_n(\lambda)}{d\lambda} = \langle \psi_n(\lambda) | \frac{dH}{d\lambda} | \psi_n(\lambda) \rangle$$