Instituto de Física Gleb Wataghin
Universidade Estadual deCampinas - Unicamp

Quarta Lista de Exercícios FI002. Teste 06/05/08

(Sakurai Cap. 7, Problema 8)

a) Prove que

$$\frac{\hbar^2}{2m}\langle\mathbf{x}|\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}|\mathbf{x}'\rangle = -ik\sum_l\sum_m Y_l^m(\hat{\mathbf{r}})Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}')j_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>)$$

onde $r_<(r_>)$ quer dizer, o menor (maior) entre r e r'.

b) Para potenciais com simetria esférica, a equação de Lippmann-Schwinger pode ser escrita para ondas esféricas:

$$|Elm(+)\rangle = |Elm\rangle + \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V|Elm(+)\rangle\,.$$

Usando a), mostre que esta equação, escrita na representação de coordenadas $\mathbf{x}$, leva a uma equação para a função radial, $A_l(k;r)$, da seguinte forma:

$$A_l(k;r) = j_l(kr) - \frac{2mik}{\hbar^2}\int_0^\infty j_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>)V(r')A_l(k;r')r'^2dr'.$$

Tomando r muito grande, obtenha

$$\begin{aligned} f_l(k) &= e^{i\delta_l}\frac{\sin\delta_l}{k} \\ &= -\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\int_0^\infty j_l(kr)A_l(k;r)V(r)r^2dr. \end{aligned}$$

Espalhamento na aproximação de Born.

Determine as fases δ_l para o espalhamento em presença de um campo com simetria esférica para o caso correspondente à aproximação de Born (ou seja, o potencial pode ser considerado como uma perturbação). (Dica: Faça isto usando a equação de onda radial para a função $\chi(r) = rR(r)$ com e sem potencial espalhador, use as formas assintóticas das funções de onda e o fato de que a função de onda deve se anular na origem do centro espalhador, $\chi = 0$ em $r = 0$).

(Sakurai Cap. 7, Problema 9)

Considere o espalhamento por uma casca repulsiva do tipo

$$V(r) = \frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta(r-R).$$

a) Encontre uma equação que determine o *phase shift* δ_0 da onda s como função de k (onde $E = \hbar^2k^2/2m$).

b) Assuma agora que γ é muito grande, tal que

$$\gamma \gg \frac{1}{R},\, k,$$

mostre que se $\tan(kR)$ não é próximo de zero, δ_0 se assemelha com o resultado de esfera dura. Mostre também que, para $\tan(kR)$ próximo de zero, mas não exatamente igual a zero, o comportamento ressonante é possível; ou seja, $\cot(\delta_0)$ passa por zero pelo sentido positivo à medida em que k cresce. Determine de forma aproximada as posições das ressonâncias, mantendo termos da ordem $1/\gamma$; compare estes com as energias de estado ligado para uma partícula confinada dentro de uma parede esférica do mesmo raio:

$$V = 0, \quad r < R; \;\; V = \infty, \;\; r > R.$$

Obtenha também uma expressão aproximada para a largura de ressonância Γ definida por:

$$\Gamma = \frac{-2}{[d(\cot\delta_0)/dE]|_{E=E_r}},$$

e note que as ressonâncias são particularmente estreitas para γ grande.