Instituto de Física Gleb Wataghin
Universidade Estadual deCampinas - Unicamp

Sexta Lista de Exercícios FI002.

Exercícios do Merzbacher Capítulo 22

22.1 Escreva explicitamente os elementos de matriz do quadrado do operador de momento angular total.

22.2 Verifique a normalização da equação (22.4). Isto é, partindo da equação (22.3) com $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ e $j_1 = j_2 = j$ encontre o valor de C.

22.4 Mostre que se duas partículas idênticas com os mesmos número quânticos α e com momento angular j se acoplam em um estado de momento angular total nulo, o estado resultante é

$$\boldsymbol{\psi}_{00}^{(2)} = [2(2j+1)]^{-1/2} \sum_{m=-j}^{j} (-1)^m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger |\mathbf{0}\rangle$$

- Complete a dedução das equações (22.19) e (22.20)

22.7 Verifique que o Hamiltoniano de Hartree-Fock H_{HF} é hermitiano e que os autokets com autovalores diferentes são ortogonais

22.8 Verifique a expressão (22.34)

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle \psi_\nu | a_k^\dagger a_j \mathcal{H} a_j^\dagger a_k |\psi_\nu\rangle = E_\nu + \varepsilon_j - \varepsilon_k - \langle jk| V |jk\rangle + \langle jk| V |kj\rangle$$

22.9 Prove que o valor esperado de $\mathcal{H}$ no estado "ionizado" $a_k |\psi_\nu\rangle$ com $n-1$ partículas é

$$\langle \mathcal{H} \rangle = E_\nu - \varepsilon_k$$

Problema 6 Aplique o método de Hartree-Fock a um sistema de dois elétrons que são atraídos para a origem do sistema de coordenas por um potencial tipo oscilador harmônico isotrópico $m\omega^2 r^2/2$ e que interagem entre eles através do potencial $V = C(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')^2$. Resolva a equação de Hartree-Fock para o estado fundamental e compare com a solução exata e com teoria de perturbações de primeira ordem.

Gás de elétrons

Um modelo teórico simples, que nos permite dar conta qualitativamente das principais características de metais reais, consiste de um gás de elétrons interagentes colocado sobre um fundo positivo uniformemente distribuído. No limite de densidades altas este sistema pode ser representado pelo seguinte Hamiltoniano

$$H = H_0 + H_1$$

com

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}$$

$$H_1 = \frac{e^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}\neq 0,\sigma_1,\sigma_2} \frac{4\pi}{q^2} a_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q},\sigma_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q},\sigma_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} a_{\mathbf{k}_1,\sigma_1},$$

onde, V é o volume do sistema, e é a carga do elétron, H_0 é o hamiltoniano não perturbado que representa o gás de elétrons não interagente, e H_1 pode ser considerado como uma perturbação. Mostre que a correção em primeira ordem da energia do estado fundamental do sistema é

$$\Delta E^{(1)} = -\frac{3}{2\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3}\frac{1}{r_s}\mathrm{Ryd}$$

- Considere um sistema de férmions ou bósons criados pelo campo $\boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ interagindo através do potencial

$$V(r) = \begin{cases} U, & (r < R) \\ 0, & (r > R) \end{cases}$$

a) Escreva a interação usando o formalismo de segunda quantização em termos dos operadores de criação e destruição.

b) Escreva a expressão final do item a) na base dos momentos. Verifique que $\left[\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k}}, \boldsymbol{\phi}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]_\pm = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$. Faça um gráfico da interação no espaço de momento.

Na terça feira 03/06/2008 resolverei em aula os dois últimos exercícios e se der tempo discutirei também o problema 6 do Merzbacher.