

Teste 2. FI002

08 de Abril de 2008

Considere um oscilador harmônico unidimensional no estado fundamental para $t < 0$. Para $t \geq 0$ está sujeito a uma força espacialmente uniforme mas dependente do tempo, aplicada na direção x ,

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}. \quad (1)$$

a) Usando teoria de perturbações dependentes do tempo até primeira ordem, obtenha a probabilidade de encontrar o oscilador no primeiro estado excitado para $t > 0$. Mostre que o limite $t \rightarrow \infty$ (τ finito) da sua expressão é independente do tempo. O resultado é razoável ou surpreendente?

b) Podem ser encontrados estados excitados?

$$(\langle n' | x | n \rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega}(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}))$$

Sol:

O problema é definido pelo hamiltoniano perturbado

$$H = H_0 + V(t), \quad (2)$$

onde

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad V(t) = -F_0 x e^{-t/\tau}. \quad (3)$$

No instante inicial, $t = 0$, o sistema se encontra no estado $|\alpha, 0\rangle = |0\rangle$. Depois de um tempo finito, o sistema se encontra em

$$|\alpha, t\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-E_n^{(0)}t/\hbar} |n\rangle, \quad (4)$$

onde $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + 1/2)$ e os vetores $|n\rangle$ são solução de $H_0 E_n^{(0)} = E_n^{(0)} |n\rangle$. Da teoria de perturbações sabemos que $c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + \dots$, onde

$$c_n^{(0)} = \delta_{n0}, \quad (5)$$

devido a que o estado inicial é o fundamental.

Na primeira ordem temos,

$$c_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \sum_m V_{nm}(t') e^{i\omega_{nm}t'} c_m^{(0)}, \quad (6)$$

substituindo (3) em (6), temos

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^t dt' e^{-t'/\tau} \left(\sqrt{n+1} e^{-i\omega t'} c_{n+1}^{(0)}(t') + \sqrt{n} e^{i\omega t'} c_{n-1}^{(0)}(t') \right), \quad (7)$$

o único termo não nulo vem de fazer $n = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}(t) &= -\frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^t dt' e^{i\omega t' - t'/\tau} \\ &= -\frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{1}{i\omega - \frac{1}{\tau}} e^{(i\omega - \frac{1}{\tau})t'} \Big|_0^t \\ &= \frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{1}{i\omega - \frac{1}{\tau}} \left[1 - e^{(i\omega - \frac{1}{\tau})t} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

A probabilidade de encontrar o oscilador harmônico em $|1\rangle$ é dada por $\left| c_1^{(1)}(t) \right|^2$. Tomamos o limite $t \rightarrow \infty$ na expressão (8)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1^{(1)}(t) \rightarrow \frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{1}{i\omega - \frac{1}{\tau}},$$

Esta expressão não depende do tempo, o qual é razoável já que o sistema assintoticamente atinge um novo estado de equilíbrio.

b) Na primeira ordem de teoria de perturbações não podem ser encontrados estados excitados adicionais pois o único coeficiente de expansão não nulo é $c_1^{(1)}(t)$, que descreve a transição entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado.