

Instituto de Física Gleb Wataghin
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp

Teste 4. FI002. (06/05/08)

- a)** Encontre uma expressão para a parte radial da função de onda $A_l(k; r)$ na região $r > R$, onde R é o alcance do potencial espalhador

$$V(r) = \frac{\gamma \hbar^2}{2m} \delta(r - R), \quad (1)$$

Para isso, use a expressão obtida (parte (b) do problema 8 cap. 7 do livro texto) para a parte radial da função de onda

$$A_l(k; r) = j_l(kr) - \frac{2mik}{\hbar^2} \int_0^\infty j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>) V(r') A_l(k; r') r'^2 dr' \quad (2)$$

- b)** Compare o resultado de **a)** (para a onda s) com a expressão geral

$$A_0(k; r) = e^{i\delta_0} [\cos \delta_0 j_0(kr) - \sin \delta_0 n_0(kr)] \quad r > R \quad (3)$$

e encontre uma expressão para $\cot \delta_0$ como função de k , analise o limite $\gamma \gg k$ e interprete o resultado. (Dado: $j_0(kr) = \sin(kr)/(kr)$, $n_0(kr) = -\cos(kr)/(kr)$)

Solução: Substituamos o potencial tipo delta na expressão (2) e integramos diretamente, levando em conta que neste caso $r_> = r$ e $r_< = r'$, assim

$$A_l(k; r) = j_l(kr) - ik\gamma j_l(kR) h_l^{(1)}(kr) A_l(k; R) R^2, \quad (4)$$

primeiro resolvemos esta equação para $A_l(k; R)$,

$$\begin{aligned} \text{em } r = R \quad A_l(k; R) &= j_l(kR) - ik\gamma j_l(kR) h_l^{(1)}(kR) A_l(k; R) R^2 \\ A_l(k; R) &= \frac{j_l(kR)}{1 + ik\gamma j_l(kR) h_l^{(1)}(kR) R^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

substituamos (5) em (4) e encontramos a expressão geral para $A_l(k; r)$

$$A_l(k; r) = j_l(kr) - \frac{ik\gamma h_l^{(1)}(kr) j_l(kR) j_l(kR) R^2}{1 + ik\gamma j_l(kR) h_l^{(1)}(kR) R^2}.$$

Agora, particularizamos o resultado para a onda s ($l = 0$)

$$\begin{aligned}
A_0(k; r) &= j_0(kr) - \frac{ik\gamma h_0^{(1)}(kr)j_0(kR)j_0(kR)R^2}{1 + ik\gamma j_0(kR)h_0^{(1)}(kR)R^2} \\
&= j_0(kr) - \frac{ik\gamma (j_0(kr) + in_0(kr)) (j_0(kR))^2 R^2}{1 + ik\gamma j_0(kR)h_0^{(1)}(kR)R^2} \\
&= j_0(kr) \left(1 - \frac{ik\gamma (j_0(kR))^2 R^2}{1 + ik\gamma j_0(kR)h_0^{(1)}(kR)R^2} \right) + n_0(kr) \left(\frac{k\gamma (j_0(kR))^2 R^2}{1 + ik\gamma j_0(kR)h_0^{(1)}(kR)R^2} \right)
\end{aligned}$$

comparamos esse resultado com a expressão geral para a onda s (eq (3)) e encontramos que

$$-\cot \delta_0 = \frac{\cos \delta_0}{-\sin \delta_0} = \frac{1 - \frac{ik\gamma (j_0(kR))^2 R^2}{1 + ik\gamma j_0(kR)h_0^{(1)}(kR)R^2}}{\frac{k\gamma (j_0(kR))^2 R^2}{1 + ik\gamma j_0(kR)h_0^{(1)}(kR)R^2}}$$

simplificando

$$-\cot \delta_0 = \frac{1 - k\gamma n_0(kR)j_0(kR)R^2}{k\gamma (j_0(kR))^2 R^2},$$

usando as expressões $j_0(kr) = \sin(kr)/(kr)$, $n_0(kr) = -\cos(kr)/kr$, encontramos finalmente

$$\cot \delta_0 = -\frac{k}{\gamma} \csc^2(kR) - k \cot(kR). \quad (6)$$

No limite $\gamma \gg k$, e $\tan kR$ não muito pequeno, temos

$$\cot \delta_0 \approx -\cot(kR),$$

ou seja, $\delta_0 = -kR$, que é exatamente o resultado obtido no caso da esfera dura.