

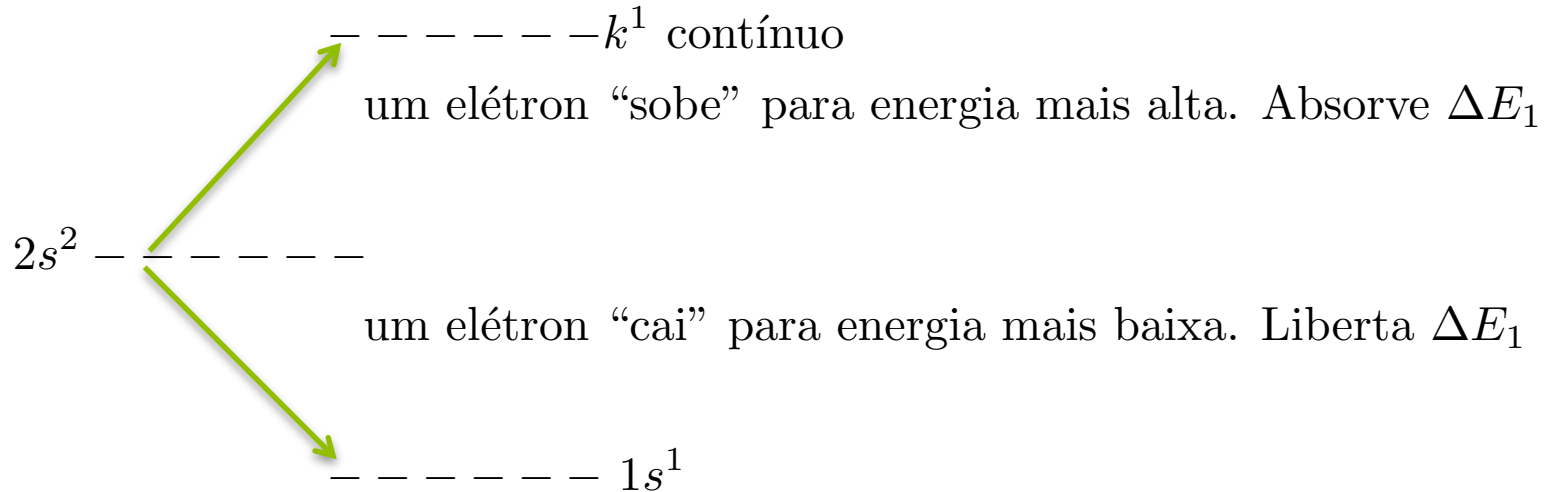
## Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante

Vimos na aula passada que para transições onde  $E_n = E_i$ ,  $|c_n(t)|^2 = \frac{|V_{ni}|^2 t^2}{\hbar^2}$ , ou seja, a probabilidade de haver mudança é quadrática em  $t$  (isso vai mudar se  $E_n$  tiver largura!). Para  $\Delta E = 0$ , apresentamos dois exemplos desta situação.

- Espalhamento elástico por um potencial  $V$

$$\text{onde: } \begin{cases} \text{antes: } e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \\ \text{depois: } e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}} \end{cases} \quad \text{com } |\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f|$$

- De-excitação de He, duplamente ocupado no nível  $2s$  (notação:  $2s^2$ )



Um ganha  $\Delta E_1$  e outro perde  $\Delta E_1$ . Para o sistema isto é  $\Delta E = 0$ .

# Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante

Nestes exemplos, estamos interessados em probabilidades totais, isto é, probabilidades de transição somadas sobre estados finais com  $E_n \approx E_i$ .

Escrevemos isso na seguinte forma:  $\sum_{n, E_n = E_i} |c_n^{(1)}|^2$ . É costume definir a

densidade de estados finais pelo número de estados dentro do intervalo de energia  $(E, E + dE)$ , por  $\rho(E)dE$ . E com isso substituir:  $\sum_{n, E_n = E_i} |c_n^{(1)}|^2$

por: 
$$\int dE_n \rho(E_n) |c_n^{(1)}|^2 = 4 \int \sin^2 \left[ \frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right] \frac{|V_{ni}|^2}{|E_n - E_i|^2} \rho(E_n) dE_n$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , é possível mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi t |E_n - E_i|^2} \sin^2 \left[ \frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right] = \frac{1}{2\hbar} \delta(E_n - E_i), \text{ pois uma das diversas}$$

formas de escrever a função delta é  $\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2}$ .   
 { 0 se  $x \neq 0$  } Num. oscila  
 { lousa } Den. explode  
 {  $\infty$  se  $x=0$  } Aplique em x l'Hôpital

Nestas condições ( $t \rightarrow$  muito grande), podemos realizar a integral

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int dE_n \rho(E_n) |c_n^{(1)}|^2 = 4\pi t \int dE_n \rho(E_n) |V_{ni}|^2 \underbrace{\sin^2 \left[ \frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right] \frac{1}{\pi t |E_n - E_i|^2}}_{\frac{1}{2\hbar} \delta(E_n - E_i)}$$

t grande

lousa

$$\frac{1}{2\hbar} \delta(E_n - E_i)$$



Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int dE_n \rho(E_n) |c_n^{(1)}|^2 &= \frac{2\pi t}{\hbar} \int dE_n \rho(E_n) \overline{|V_{ni}|^2} \delta(E_n - E_i) = \\ &= \frac{2\pi t}{\hbar} \overline{|V_{ni}|^2} \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i} \end{aligned}$$

O valor médio de  $|V_{ni}|^2$  é necessário, pois pressupomos um quase contínuo de estados com autovalores ao redor de  $E_n$ . Nem sempre os  $V_{ni}$  são iguais para  $|n\rangle$ 's diferentes, mesmo tendo o mesmo  $E_n$ . Daí a média. Observe também que esta quantidade é linear em  $t$ . Isto é consequência do que vimos nas figuras que o pico de  $f(\omega)$  vai com  $t^2$  e a largura com  $1/t$ .

[lousa](#)

**Taxa de transição total**, definida por  $\frac{d}{dt} \left( \sum_n |c_n^{(1)}|^2 \right) \equiv w_{i \rightarrow [n]}$

Em primeira ordem, temos  $w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|V_{ni}|^2} \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i} \Rightarrow$  esta é a chamada *Regra de Ouro de Fermi*.

As vezes a escrevemos como  $w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|V_{ni}|^2} \delta(E_n - E_i)$  onde fica subentendido que é preciso integrar em  $\int dE_n \rho(E_n)$ .

Vamos agora olhar o termo de segunda ordem para o mesmo potencial perturbativo **constante**.

$$\text{Aula passada } \begin{cases} c_n^{(0)} = \delta_{ni} \\ c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni}(t') dt', \\ c_n^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{nm}t'} V_{nm}(t') e^{i\omega_{mi}t''} V_{mi}(t'') \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Podemos escrever } c_n^{(2)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m V_{nm} V_{mi} \int_0^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{mi}t''} = \\ &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m V_{nm} V_{mi} \int_0^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \left( \frac{e^{i\omega_{mi}t''}}{i\omega_{mi}} \right)_0^{t'} = \\ &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \frac{V_{nm} V_{mi}}{i\omega_{mi}} \int_0^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \left( e^{i\omega_{mi}t'} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{i}\right) \sum_m \frac{V_{nm} V_{mi}}{E_m - E_i} \int_0^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \left( e^{i\omega_{mi}t'} - 1 \right) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_m \frac{V_{nm} V_{mi}}{E_i - E_m} \int_0^t dt' \left( e^{i\omega_{ni}t'} - e^{i\omega_{nm}t'} \right) \end{aligned}$$

Chamaremos de 1º. termo e 2º. termo

O primeiro termo tem a mesma dependência que encontramos em  $c_n^{(1)}$  e o segundo termo pode ser desprezado (o resultado não crescerá linearmente com  $t$ ), pois depende de  $\omega_{nm}$ , o que faz a exponencial oscilar muito, e isso contribui destrutivamente na integração. Assim, conseguimos escrever:

lousa

$$w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{\left| V_{ni} + \sum_m \frac{V_{nm} V_{mi}}{E_i - E_m} \right|^2 \rho(E_n)} \Big|_{E_n = E_i}$$

## Perturbação Harmônica

$$V(t) = \mathcal{V} e^{i\omega t} + \mathcal{V}^\dagger e^{-i\omega t} \text{ com } \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{S}, \text{etc.}) \rightarrow \mathcal{V}^\dagger \text{ pode ser } \neq \mathcal{V}$$

Do slide 13 (aula 8), temos  $c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle n | V_I | i \rangle dt' = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni}(t') dt' =$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left( \mathcal{V}_{ni} e^{i\omega t'} + \mathcal{V}_{ni}^\dagger e^{-i\omega t'} \right) e^{i\omega_{ni}t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{V}_{ni} e^{i(\omega_{ni} + \omega)t'} dt' +$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{V}_{ni}^\dagger e^{i(\omega_{ni} - \omega)t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} \left( \mathcal{V}_{ni} \frac{e^{i(\omega_{ni} + \omega)t}}{i(\omega_{ni} + \omega)} \Big|_0^t + \mathcal{V}_{ni}^\dagger \frac{e^{i(\omega_{ni} - \omega)t}}{i(\omega_{ni} - \omega)} \Big|_0^t \right) =$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \left( \frac{e^{i(\omega_{ni} + \omega)t} - 1}{\omega_{ni} + \omega} \mathcal{V}_{ni} + \frac{e^{i(\omega_{ni} - \omega)t} - 1}{\omega_{ni} - \omega} \mathcal{V}_{ni}^\dagger \right) \text{ com } \mathcal{V}_{ni}^\dagger = (\mathcal{V}^\dagger)_{ni}$$

lousa

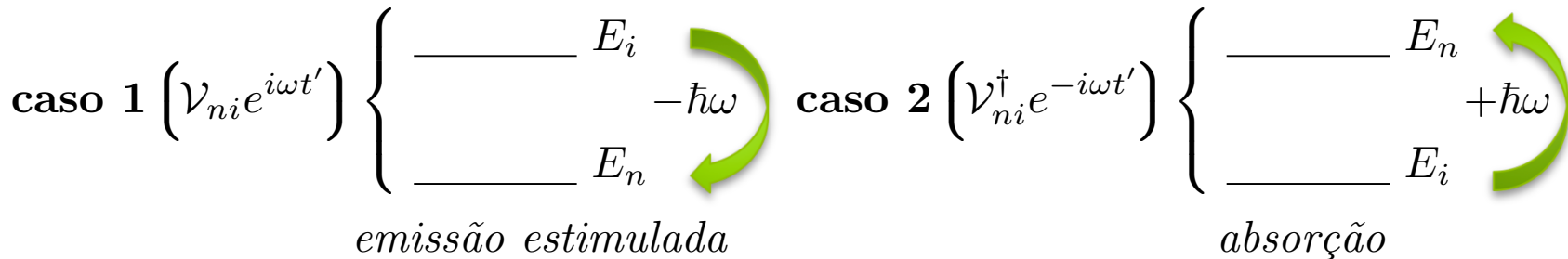
# Perturbação Harmônica

Estamos fazendo a conta de novo, mas se observamos o que fizemos para o potencial constante, basta seguir os mesmos passos, trocando  $\omega_{ni} \Rightarrow \omega_{ni} \pm \omega$ ,

pois  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Perturbação constante: } c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni} dt' \\ \text{Perturbação Harmônica: } c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \left( \mathcal{V}_{ni} e^{i\omega t'} + \mathcal{V}_{ni}^\dagger e^{-i\omega t'} \right) e^{i\omega_{ni}t'} dt' \end{array} \right.$

Assim, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $|c_n^{(1)}|^2$  seria apreciável se  $\left\{ \begin{array}{l} \omega_{ni} + \omega \approx 0 \rightarrow E_n = E_i - \hbar\omega \\ \omega_{ni} - \omega \approx 0 \rightarrow E_n = E_i + \hbar\omega \end{array} \right.$

*observação: quando o primeiro é importante o segundo não é! e vice-versa.*



Regra de Ouro de Fermi  $\left\{ \begin{array}{l} w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} |\overline{\mathcal{V}_{ni}}|^2 \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i - \hbar\omega} \rightarrow \text{emissão} \\ w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} |\overline{\mathcal{V}_{ni}^\dagger}|^2 \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i + \hbar\omega} \rightarrow \text{absorção} \end{array} \right.$

# Perturbação Harmônica

Ou simplesmente  $w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_n - E_i \pm \hbar\omega) \begin{cases} |\mathcal{V}_{ni}|^2 \\ |\mathcal{V}_{ni}^\dagger|^2 \end{cases} \Rightarrow$  onde é necessário

entender que esta expressão deve ser integrada com  $\int dE_n \rho(E_n)$

Note que  $\mathcal{V}_{ni} = \langle n | \mathcal{V} | i \rangle = \langle i | \mathcal{V}^\dagger | n \rangle^* = (\mathcal{V}_{in}^\dagger)^*$  e  $\therefore |\mathcal{V}_{ni}| = |\mathcal{V}_{in}^\dagger|$ . Isto permite

escrever  $\begin{cases} w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{V}_{ni}|^2 \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i - \hbar\omega} \rightarrow \text{emissão} \\ \text{troque } n \text{ por } i \text{ na absorção e obtenha} \\ w_{n \rightarrow [i]} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{V}_{ni}|^2 \rho(E_i) \Big|_{E_i = E_n + \hbar\omega} \rightarrow \text{absorção} \end{cases}$

e ao dividir uma pela outra, obter  $\frac{w_{i \rightarrow [n]}}{\rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i - \hbar\omega}} = \frac{w_{n \rightarrow [i]}}{\rho(E_i) \Big|_{E_i = E_n + \hbar\omega}}$

$\frac{\text{taxa de emissão de } i \rightarrow [n]}{\text{densidade de estados finais } [n]} = \frac{\text{taxa de absorção de } n \rightarrow [i]}{\text{densidade de estados finais } [i]}$

*Relação conhecida por balanceamento detalhado*

# Aplicações: Campo de Radiação Clássico

A Hamiltoniana Clássica de um campo de radiação clássico interagindo com

um elétron preso à um potencial é dada por:  $H = \frac{1}{2m_e} \left( \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 + e\phi$

e pode ser expandida em  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{e}{2m_e c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \left( \frac{e}{c} \right)^2 \mathbf{A}^2 + e\phi$

Para casos onde  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e o termo em  $\mathbf{A}^2$  puder ser desprezado, temos:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + e\phi - \frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

Especificamente trabalharemos com  $\mathbf{A} = 2A_0 \hat{\mathbf{e}} \cos \left( \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t \right)$ , com as

definições  $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{e}} \text{ direção de polarização} \\ \hat{\mathbf{n}} \text{ direção de propagação} \\ \text{e } \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \end{array} \right.$



*Mostre que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$*

**faça a conta**

Lembrando que

$\cos \left( \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t \right) = \frac{e^{i(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}) - i\omega t} + e^{-i(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}) + i\omega t}}{2}$  podemos escrever  $-\frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$



## Aplicações: Campo de Radiação Clássico

$$\text{Assim, } -\frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -\frac{e}{m_e c} A_0 \left( \underbrace{e^{i\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}\right) - i\omega t}}_{\text{absorção}} + \underbrace{e^{-i\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}\right) + i\omega t}}_{\text{emissão}} \right) \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p}$$

$$\text{ou seja } \begin{cases} \mathcal{V}_{ni}^\dagger = -\frac{eA_0}{m_e c} \left( e^{i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} \right)_{ni} \implies \text{absorção} \\ \mathcal{V}_{ni} = -\frac{eA_0}{m_e c} \left( e^{-i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} \right)_{ni} \implies \text{emissão} \end{cases}$$

Faremos a absorção com algum detalhe. Primeiramente, vamos calcular os campos elétrico e magnético associados ao  $\mathbf{A} = 2A_0 \hat{\mathbf{e}} \cos\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right)$ .

$$\mathbf{E} \text{ é direto, } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = 2A_0 \left(\frac{\omega}{c}\right) \hat{\mathbf{e}} \sin\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right) \Rightarrow E_{max} = 2A_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)$$

$\mathbf{B}$  é um pouco mais elaborado,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , onde aplicaremos a regra da cadeia:  $\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a}$  para obter:

$$\mathbf{B} = \left( \nabla [2A_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right)] \right) \times \hat{\mathbf{e}} + [2A_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right)] \underbrace{\nabla \times \hat{\mathbf{e}}}_0$$

e assim, temos  $\mathbf{B} = -2A_0 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right) \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}$  ou

$$\mathbf{B} = 2A_0 \left(\frac{\omega}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right) \hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow B_{max} = 2A_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)$$

## Aplicações: Campo de Radiação Clássico

A densidade de energia é definida por

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{\max}^2}{8\pi} + \frac{B_{\max}^2}{8\pi} \right) = \frac{1}{2} \left( 4A_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} + 4A_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{1}{8\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^2} A_0^2$$

Para absorção, temos  $\mathcal{V}_{ni}^\dagger = -\frac{eA_0}{m_e c} \left( e^{i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} \right)_{ni}$  e podemos escrever:

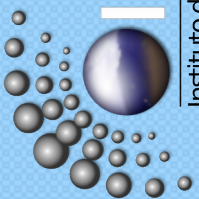
$$w_{i \rightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{V}_{ni}^\dagger|^2 \delta(E_n - E_i - \hbar\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2 A_0^2}{m_e^2 c^2} |\langle n | e^{i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 \delta(E_n - E_i - \hbar\omega)$$

O significado da função  $\delta$  é o de sempre, se o estado final é contínuo: integre com  $\rho(E_n)$ . Se  $|n\rangle$  é discreto, como ele não pode ser o estado fundamental (pois  $E_n > E_i$ ) sua energia não é infinitamente fina. Pode ocorrer um alargamento natural devido ao tempo de vida finito do estado (pode também haver um alargamento natural devido à colisões). Nestas condições:

$$\delta(\omega - \omega_{ni}) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_{ni})^2 + \gamma^2/4}$$

Se definirmos uma seção de choque de absorção por:

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\text{(Energia/Unidade de tempo) absorvida por 1 átomo } (i \rightarrow n)}{\text{fluxo de energia do campo de radiação}}$$



## Aplicações: Campo de Radiação Clássico

Para calcular o fluxo de energia por unidade de área, pense em  $\rho v$ , em fluidos.

Como sabemos a densidade de energia  $U$ , o fluxo é dado por  $Uc = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c} A_0^2$ .

Desta forma, considerando que a energia do fóton é  $\hbar\omega$  e que sabemos calcular a taxa de transição, temos:

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\hbar\omega \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2 A_0^2}{m_e^2 c^2} |\langle n | e^{i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 \delta(E_n - E_i - \hbar\omega)}{\frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c} A_0^2} \quad \text{ou, simplificando}$$

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{4\pi^2 \hbar}{m_e^2 \omega} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) |\langle n | e^{i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 \delta(E_n - E_i - \hbar\omega)$$

*Mostre que  $\sigma_{\text{abs}}$  tem unidade de área. Aula que vem, utilizaremos esta expressão para estudar a chamada aproximação de dipolo elétrico.*

faça a conta

- Aplique l'Hôpital em  $x \rightarrow 0$  em  $f(\alpha, x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2}$ . Como numerador e denominador vão a zero, a regra diz  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\alpha, x) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{d}{dx} \sin^2 \alpha x}{\frac{d}{dx} \alpha x^2}$ . Assim, derivando em cima e em baixo com respeito à  $x$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(\alpha, x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha 2 \sin \alpha x \cos \alpha x}{2\alpha x} = \frac{\alpha \sin 2\alpha x}{\pi 2\alpha x} \approx \frac{\alpha 2\alpha x}{\pi 2\alpha x} = \frac{\alpha}{\pi} = \infty \text{ se } \alpha = \infty$$

- Quando  $t \rightarrow \infty$ , temos (tome  $x = \frac{E_n - E_i}{2\hbar}$ )

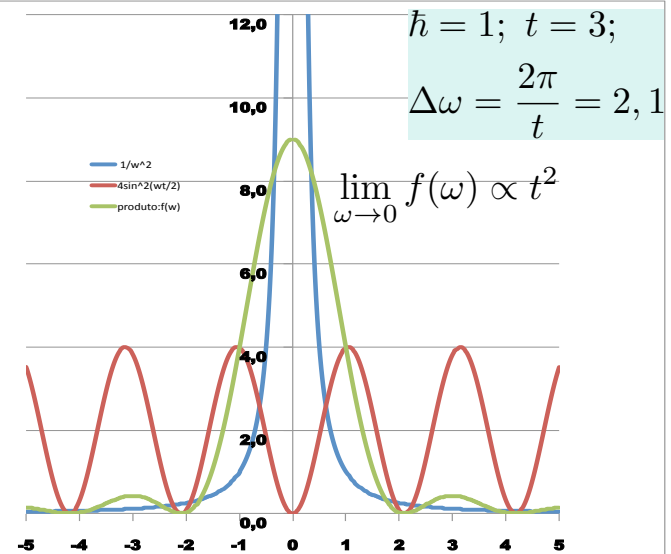
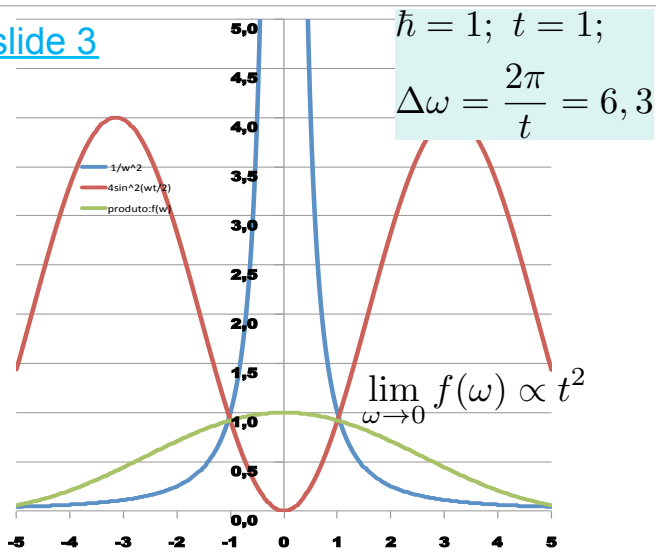
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi t |E_n - E_i|^2} \sin^2 \left[ \frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right] &= \frac{1}{(2\hbar)^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 tx}{tx^2} = \frac{\delta(x)}{(2\hbar)^2} = \frac{\delta\left(\frac{E_n - E_i}{2\hbar}\right)}{(2\hbar)^2} = \\ &= \frac{1}{2\hbar} \delta(E_n - E_i). \end{aligned}$$

- $$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ V & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} dt' = -\frac{2ie^{\frac{i\omega_{ni}t}{2}} V_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} \sin \frac{\omega_{ni}t}{2}$$

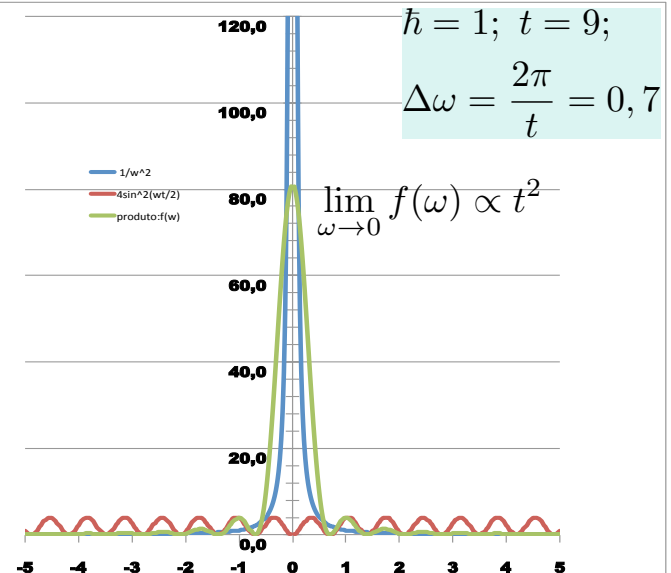
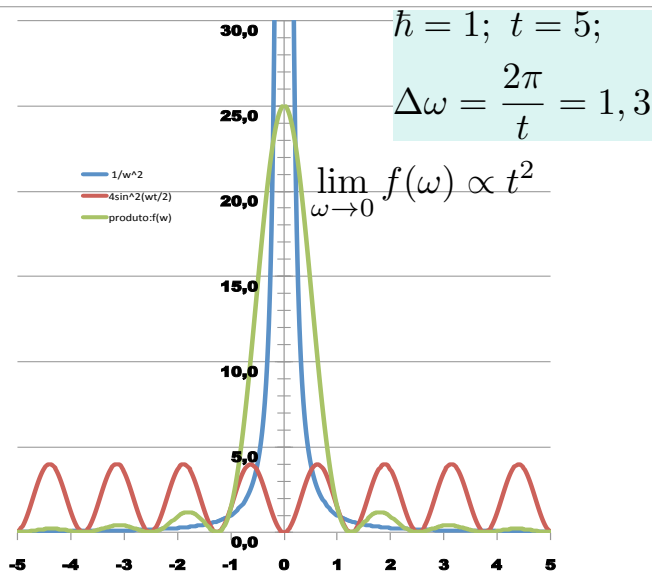
fizemos essa conta

- Troque  $\omega_{ni}$  por  $\omega_{ni} \pm \omega$

slide 3



$$f(\omega) = \frac{4}{\hbar^2 \omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2}$$



$\int f(\omega) d\omega \propto t \left\{ \begin{array}{l} \text{largura} \propto 1/t \rightarrow \text{relev\^ancia entre } -\frac{2\pi}{t} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{t} \\ \text{O pico da curva } f(\omega) \text{ \^e proporcional \^a } t^2. \end{array} \right.$