Série de Born

Nossa intenção agora é calcular $f(\mathbf{k}',\mathbf{k})$ e, consequentemente, as seções de choque. Em princípio, basta achar $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ e calcular $\langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$. Uma forma de fazer isso é resolver a equação de Lippmann-Schwinger

$|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \dfrac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ iterativamente, isto é

$$\boxed{|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\mathbf{k}\rangle + \ldots}$$

Outra forma é via matriz T, obtida pela equação de Lippmann-Schwinger multiplicada por V, isto é $V|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = V|\mathbf{k}\rangle + V\dfrac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ e trocando $V|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ por $T|\mathbf{k}\rangle \Rightarrow T|\mathbf{k}\rangle = V|\mathbf{k}\rangle + V\dfrac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} T|\mathbf{k}\rangle$

Considere $|\mathbf{k}\rangle$ arbitrário $\rightarrow T = V + V\dfrac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} T$ que iterando fica

$$\boxed{T = V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V + \ldots}$$

As duas expressões das caixas tem hierarquia em $\mathcal{O}(V^n)$.

A série de Born é obtida com qualquer uma delas inserida em

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle.$$

Instituto de Física Gleb Wataghin

MAPLima

UNICAMP

A aproximação de Born ou 1°. termo da série

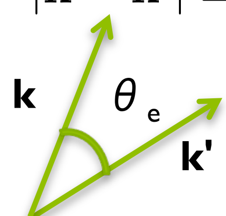
Se o espalhamento é fraco $|\Psi^{(+)}_{\mathbf{k}}\rangle \approx |\mathbf{k}\rangle \rightarrow \langle \mathbf{x}'|\Psi^{(+)}_{\mathbf{k}}\rangle \approx \langle \mathbf{x}'|\mathbf{k}\rangle = \dfrac{e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}}$

Nestas condições, obtemos a amplitude de Born em 1a. ordem:

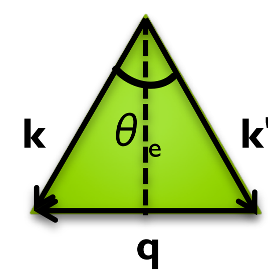
$$f^{(1)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle \mathbf{k}'|V|\mathbf{k}\rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x' V(\mathbf{x}')e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\mathbf{x}'}}_{\substack{\textit{Transformada de Fourier do potencial} \\ \textit{calculada em } \mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}'}}$$

Se o potencial for esfericamente simétrico, fica mais simples calcular a integral em coordenadas esféricas. Antes, escolha θ_e ângulo de espalhamento da seguinte forma:

$$|\mathbf{k}-\mathbf{k}'| \equiv q = \sqrt{k^2 + k'^2 - 2\mathbf{k}.\mathbf{k}'} = \underbrace{k\sqrt{2(1-\cos\theta_e)}}$$



$k = k'$ (colisão elástica)



Lembrando da relação trigonométrica $\cos 2\theta_e = \cos^2\theta_e - \sin^2\theta_e = 1 - 2\sin^2\theta_e$

$$\therefore \cos\theta_e = 1 - 2\sin^2\theta_e/2 \rightarrow q = k\sqrt{2(1-1+2\sin^2\theta_e/2} = 2k\sin\theta_e/2$$

Perceba no triângulo isósceles que $\sin\theta_e/2 = \dfrac{q/2}{k}$

A aproximação de Born ou 1°. Termo da série

Com $\mathbf{q}$ na direção $\hat{\mathbf{z}}$, temos: $f^{(1)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x' V(\mathbf{x}')e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\mathbf{x}'} =$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int\int\int \sin\theta d\theta d\varphi r^2 e^{i\mathbf{q}.\mathbf{r}}V(r) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int\int\int \sin\theta d\theta d\varphi r^2 e^{iqr\cos\theta}V(r) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\ r^2 V(r)\ 2\pi \int_0^\pi \sin\theta e^{iqr\cos\theta}d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\ r^2 V(r)\frac{e^{iqr\chi}}{iqr}\Big|_{-1}^{+1} =$$

$$= -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty dr\ rV(r)\frac{e^{iqr}-e^{-iqr}}{2i} = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty dr\ rV(r)\sin(qr)$$

Exemplo 1: $V(r) = \frac{V_0 e^{-\mu r}}{\mu r}$ potencial de Yukawa

$\frac{1}{\mu}$ pode ser visto como alcance do potencial, pois quando $r >> \frac{1}{\mu} \Rightarrow V(r) \to 0$

Usaremos que $\sin qr = \mathrm{Im}\ e^{iqr}$ *para facilitar a realização da integral, ou seja*

$$f^{(1)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty dr\ rV(r)\sin(qr) = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty dr\ r\frac{V_0 e^{-\mu r}}{\mu r}\mathrm{Im}\ e^{iqr}$$

1°. termo da série de Born: Potencial de Yukawa

Assim, $f^{(1)}(\theta_e) = -\frac{2mV_0}{q\mu\hbar^2}\text{Im}\int_0^\infty dr\ e^{(-\mu+iq)r} = -\frac{2mV_0}{q\mu\hbar^2}\text{Im}\ \frac{e^{(-\mu+iq)r}}{-\mu+iq}\Big|_0^\infty =$

$$= -\frac{2mV_0}{q\mu\hbar^2}\text{Im}\ \frac{1}{\mu-iq} = -\frac{2mV_0}{q\mu\hbar^2}\text{Im}\ \frac{\mu+iq}{\mu^2+q^2} = -\frac{2mV_0}{q\mu\hbar^2}\frac{q}{\mu^2+q^2}$$

Ou seja, $f^{(1)}(\theta_e) = -\frac{2mV_0}{\mu\hbar^2}\frac{1}{\mu^2+q^2}$. Lembrando que $q = 2k\sin\theta_e/2$ a amplitude

fica: $f^{(1)}(\theta_e) = -\frac{2mV_0}{\mu\hbar^2}\frac{1}{\mu^2+4k^2\sin^2\theta_e/2}$ e isso fornece a seção de choque

diferencial: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta_e) = (\frac{2mV_0}{\mu\hbar^2})^2\frac{1}{(\mu^2+4k^2\sin^2\theta_e/2)^2}$

Note que se tomarmos $\mu \to 0$, mantendo $\frac{V_0}{\mu}$ constante, digamos $\frac{V_0}{\mu} = -ZZ'e^2$

o potencial de Yukawa fica $\lim_{\mu\to 0,\ \frac{V_0}{\mu}=ZZ'e^2} V_0\frac{e^{-\mu r}}{\mu r} = -\frac{ZZ'e^2}{r}$ (esse é potencial

Coulombiano de uma partícula de carga $Z'e$, sendo espalhada por uma com

carga Ze). Com isso a seção de choque fica (com $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$) :

$$\sigma(\theta_e) = \frac{1}{16}(\frac{ZZ'e^2}{E})^2\frac{1}{\sin^4\theta_e/2}$$

{ *Este é resultado clássico do espalhamento de Rutherford.*

1°. termo da série de Born: esfera mole

O poço de potencial finito (esfera mole) é caracterizado por $V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$

A amplitude (1o. Born) é obtida diretamente da integral:

$$f^{(1)}(\theta_e) = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty dr\ rV(r)\sin qr = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0 a^3}{(qa)^2}\left(\frac{\sin qa}{qa} - \cos qa\right)$$

lousa

Esta função tem zeros em $qa = 4,49;\ 7,73;\ 10,9;$ ... e as posições destes zeros, com auxílio de $q = 2k\sin\theta_e/2,$ podem ser usados para determinar o raio da esfera a.

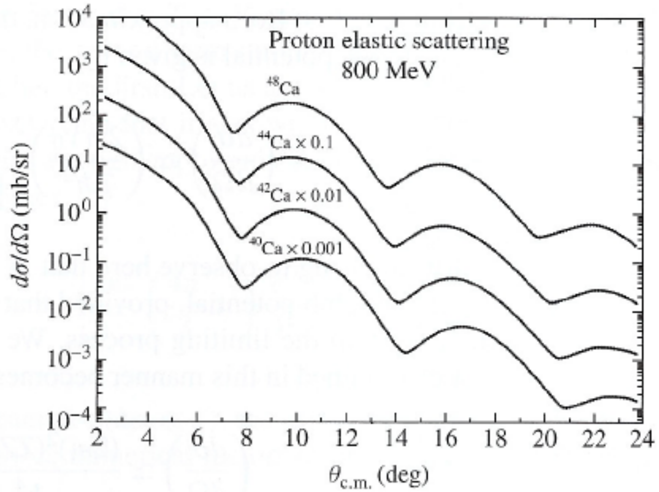


Figura 6.6 do livro texto.

Note que os mínimos na DCS se movem para esquerda para núcleos mais pesados. Como o tamanho "a" da caixa aumenta com a inclusão de nêutrons, "q" precisa diminuir (pois, qa está fixo). Como k é fixo, θ precisa diminuir.

A figura mostra seções de choque diferenciais de espalhamento de prótons por isótopos de Cálcio. O potencial de esfera mole é uma aproximação bastante razoável deste processo, como sugerem os mínimos nas curvas de seções de choque diferenciais relativas a cada alvo.

Observações importantes sobre 1°. termo da série de Born

- $f^{(1)}(\theta_e)$ é uma função de q somente. Isso está claro em

$$f^{(1)}(\theta_e) = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty dr\ rV(r)\sin qr$$

a dependência em θ_e e em $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ entra via q, pois $q = 2k\sin\theta_e/2$.

- $f^{(1)}(\theta_e)$ é uma função real. Problema: não vale o teorema óptico.

- $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ independe do sinal de V.

- Para q pequeno, supondo qr pequeno (se r grande, $V(r)$ cuida dele)

$$f^{(1)}(\theta_e) = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\ r^2 V(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x'\ V(r) \text{ (é geométrico)}$$

- Quando q cresce, $f^{(1)}(\theta_e)$ decresce, pois o integrando oscila muito.

Validade do 1°. termo da série de Born

Comece com $\langle \mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = \langle \mathbf{x}|\phi_{\mathbf{k}}\rangle - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x' \frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|}}{|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|}V(\mathbf{x}')\langle \mathbf{x}'|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$

Queremos $\langle \mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle \approx \langle \mathbf{x}|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$ que significa ter:

$$\left|\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x' \frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|}}{|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|}V(\mathbf{x}')\langle \mathbf{x}'|\mathbf{k}\rangle\right| << |\langle \mathbf{x}|\phi_{\mathbf{k}}\rangle| \quad \forall|\mathbf{x}|.$$

Na região $\mathbf{r} \approx 0$ temos: $\boxed{\left|\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{e^{\pm ikr'}}{r'}V(\mathbf{x}')e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}'}\right| << 1}$

*Aqui o denominador é mínimo (x'=0) onde o potencial é máximo. Se vale para **r**=0 vale para todo **r**.*

onde usamos que para $\mathbf{r} \approx 0$, vale $\begin{cases} \frac{e^{\pm ik|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|}}{|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} \approx \frac{e^{\pm ikr'}}{r'} \\ \langle \mathbf{x}|\phi_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \end{cases}$

Considere o potencial de Yukawa $V(r) = \frac{V_0 e^{-\mu r}}{\mu r}$

Um comprimento de onda não "cabe" no alcance do potencial

Para k pequeno: tome $kr' << 1$ e $\mathbf{k}.\mathbf{x}' << 1$. Isso é possível se $\frac{1}{\mu} \div \frac{\lambda}{2\pi} << 1$,

O valor máximo de x' para V(x') ≠0 é ~1/ μ

com $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ou seja $k << \mu$, pois se μ grande, kr' e $\mathbf{k}.\mathbf{x}'$ são pequenos na região do potencial. Com isso, podemos escrever a condição de validade por:

Validade do 1º. termo da série de Born: Potencial de Yukawa

$$|\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\frac{1}{r'}\frac{V_0e^{-\mu r'}}{\mu r'}| << 1 \text{ ou ainda}$$

Da caixa verde do slide anterior, fizemos as duas exponenciais iguais à 1

$$|\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}4\pi\int_0^\infty r'^2\frac{1}{r'}\frac{V_0e^{-\mu r'}}{\mu r'}| << 1 \Rightarrow |\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}||\int_0^\infty e^{-\mu r'}| << 1$$

e assim, finalmente obter, para energias baixas, a condição de validade

do 1o. termo de Born para o potencial Yukawa: $\boxed{|\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu^2}| << 1.}$

Para entender o significado desta expressão, estudaremos em que condições

o potencial $\frac{V_0e^{-\mu r'}}{\mu r'}$ fornece um estado ligado. Que tal $\frac{1}{\mu}\div\frac{\lambda}{2\pi} > 1$, isto é,

$\mu\lambda < 2\pi$ (pelo menos uma oscilada dentro do alcance do potencial) $\therefore \frac{2\pi}{\lambda} > \mu$

Ou seja, para o potencial de Yukawa ter um estado ligado, é preciso que $k > \mu$.

isso contradiz k<< μ

Isto implica em $k^2 > \mu^2 \Rightarrow \frac{\hbar^2k^2}{2m} > \frac{\hbar^2\mu^2}{2m}$. A energia $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + V \approx 0$ (quase

ligado) e $\therefore$ no alcance de $V \approx V_0e^{-1}$, temos $-\frac{V_0}{e} = \frac{\hbar^2k^2}{2m} > \frac{\hbar^2\mu^2}{2m}$ ou seja,

isso contradiz resultado da caixa em azul

$\frac{2m}{\hbar^2\mu^2}|V_0| > e \sim 2,7$ *(se o potencial permite um estado ligado, o 1o. termo de Born não funciona).* **O caso k grande,** *fica para lista de exercícios.*

Série de Born

O exercício 7 da lista 3 pede para você mostrar que quando k é grande, o 1o. termo de Born para o potencial de Yukawa funciona se $\dfrac{2m|V_0|}{\hbar^2\mu k}\ln\dfrac{k}{\mu} << 1.$

Isso é mais fácil de satisfazer e $\therefore$ 1o. termo de Born funciona melhor para altas energias.

Consulte tabela de integrais de I. S. Gradshteyn/I. M. Ryzhik, *Corrected and enlarged edition*, pg. 491-2

Aproximação de Born em ordem superiores.

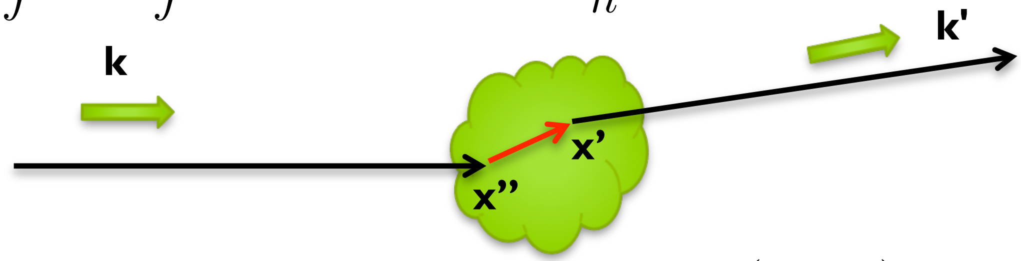
Tome, por exemplo a segunda ordem $T = V + V\dfrac{1}{E-H_0+i\epsilon}V$ para obter

$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = f^{(1)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) + f^{(2)}(\mathbf{k}',\mathbf{k})$ onde já escrevemos o termo de 1a ordem e

$$f^{(2)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m(2\pi)^3}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\int d^3x''\langle\mathbf{k}'|\mathbf{x}'\rangle V(\mathbf{x}')\langle\mathbf{x}'|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|\mathbf{x}''\rangle\times$$

$$\times V(\mathbf{x}'')\langle\mathbf{x}''|\mathbf{k}\rangle =$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\int d^3x'' e^{-i\mathbf{k}'.\mathbf{x}'}V(\mathbf{x}')\frac{2m}{\hbar^2}G^{(+)}(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')V(\mathbf{x}'')'e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}''}$$



Interpretação: *onda incidente* $\mathbf{k}$ "interage" (via V) *em* $\mathbf{x}''$, *propaga* (via G) *até* $\mathbf{x}'$, *"interage"* (via V) *em* $\mathbf{x}'$ *e sai com* $\mathbf{k}'$.

Um método variacional para a amplitude de espalhamento

(Existem outros!)

Vimos que $\langle \mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = \langle \mathbf{x}|\phi_{\mathbf{k}}\rangle - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x' \frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|}}{|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|}V(\mathbf{x}')\langle \mathbf{x}'|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle,$

que formalmente pode ser re-escrita:

$|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = |\phi_{\mathbf{k}}\rangle + G_0^{(\pm)}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$ com $G_0^{(\pm)} = \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}$. Multiplicando por V e reorganizando temos:

$$\boxed{A^{(\pm)}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = V|\phi_{\mathbf{k}}\rangle}$$

- $A^{(\pm)} = V - VG_0^{(\pm)}V$ (coisas conhecidas).
- Resolver esta equação equivale a resolver $H|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = E|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$ com condições de contorno.

A amplitude de espalhamento, $f(\mathbf{k}',\mathbf{k})$, pode ser escrita por

$$\underbrace{-\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle \phi_{\mathbf{k}'}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle}_{f_1} = \underbrace{-\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle \Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|V|\phi_{\mathbf{k}}\rangle}_{f_2} = \underbrace{-\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle \Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|A^{(+)}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle}_{f_3}$$

lousa

O Método Variacional de Schwinger

$$[f(\mathbf{k}',\mathbf{k})] = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\left[\langle \phi_{\mathbf{k}'}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle + \langle \Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|V|\phi_{\mathbf{k}}\rangle - \langle \Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|A^{(+)}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle\right]$$

Note que trata-se de $f_1 + f_2 - f_3$ e observe que se $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$ são soluções exatas $[f(\mathbf{k}',\mathbf{k})] = f(\mathbf{k}',\mathbf{k})$, pois $\Rightarrow f_1 = f_2 = f_3$

O Método Variacional de Schwinger

- Mostre que $\delta[f] = 0 \rightarrow A^{(\pm)}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = V|\phi_{\mathbf{k}}\rangle$ (use que ${A^{(+)}}^{\dagger} = A^{(-)}$).

  Dica: trate variações $\delta|\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}\rangle$ independente de variações $\delta\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}|$ voluntário?

- Se V é de curto alcance, convença-se que $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$ pode ser expandida em uma base de funções quadraticamente integráveis, ou seja

$$|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = \sum_m a_m^{(\pm)}(\mathbf{k})|\varphi_m\rangle$$

- Insira esta expansão na fórmula de Schwinger do slide anterior e trate $a_m^{(\pm)}(\mathbf{k})$ como parâmetros variacionais para obter:

$$[f] = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\sum_{mn}\langle\phi_{\mathbf{k}'}|V|\varphi_m\rangle(d^{-1})_{mn}\langle\varphi_n|V|\phi_{\mathbf{k}}\rangle \text{ com } d_{mn} = \langle\varphi_m|A^{(+)}|\varphi_n\rangle$$

voluntário?

Dica: considere $a_m^{(+)}(\mathbf{k})$ independente de $a_m^{(-)}(\mathbf{k})$.

- Note que as integrais envolvem coisas conhecidas: $|\phi_{\mathbf{k}'}\rangle$; $|\varphi_m\rangle$; V; $G_0^{(+)}$

lousa

slide 5

- A amplitude (1o. Born) é obtida diretamente da integral:

$$f^{(1)}(\theta_e) = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty dr\ rV(r)\sin qr = -\frac{2m}{q\hbar^2}V_0\frac{d}{dq}\int_0^a dr(-\cos qr) =$$

$$= -\frac{2m}{q\hbar^2}V_0\frac{d}{dq}(-\frac{\sin qr}{q})\Big|_0^a = -\frac{2m}{q\hbar^2}V_0\frac{d}{dq}(-\frac{\sin qa}{q}) = -\frac{2m}{q\hbar^2}V_0\{-\frac{d}{dq}(\frac{\sin qa}{q})\} =$$

$$= -\frac{2m}{q\hbar^2}V_0\{-(\frac{aq\cos qa - \sin qa}{q^2})\} = -\frac{2m}{q\hbar^2}V_0\frac{a}{q}(\frac{\sin qa}{qa} - \cos qa) =$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0 a^3}{(qa)^2}\left(\frac{\sin qa}{qa} - \cos qa\right)$$

slide 10

- A pergunta que não quer calar:

Vimos que Amplitude de espalhamento é dada por

$$f(\mathbf{k_f},\mathbf{k_i}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k_f}|V|\psi^{(+)}_{\mathbf{k_i}}\rangle \text{ onde } \begin{cases} H_0|\mathbf{k}\rangle = E|\mathbf{k}\rangle \\ H|\psi^{(+)}_{\mathbf{k_i}}\rangle = E|\psi^{(+)}_{\mathbf{k_i}}\rangle \\ H = H_0 + V \rightarrow V = H - H_0 \end{cases}$$

Isto implica em $\Rightarrow f(\mathbf{k_f},\mathbf{k_i}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k_f}|H - H_0|\psi^{(+)}_{\mathbf{k_i}}\rangle = 0?$

H e H_0 não são operadores Hermiteanos? Como explicar esse zero?

voluntário?