Estados da partícula livre: ondas planas versus ondas esféricas

A Hamiltoniana do sistema de uma partícula livre é dada por: $H_0 = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}$

que em suas dimensões cartesianas fica $H_0 = \dfrac{{p_x}^2}{2m} + \dfrac{{p_y}^2}{2m} + \dfrac{{p_z}^2}{2m}$. Para definir uma base, escolha $|k'_x\rangle \rightarrow p_x|k'_x\rangle = \hbar k'_x|k'_x\rangle$ e construa $|\mathbf{k}'\rangle = |k'_x\rangle \otimes |k'_y\rangle \otimes |k'_z\rangle$ de tal forma que $H_0|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{\hbar^2({k'_x}^2 + {k'_y}^2 + {k'_z}^2)}{2m}|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{\hbar^2\mathbf{k}'^2}{2m}|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{\mathbf{p}'^2}{2m}|\mathbf{k}'\rangle$.

Na representação das coordenadas, temos $\langle \mathbf{x}'|\mathbf{k}'\rangle = \dfrac{e^{i\mathbf{k}'.\mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}}$. Para obter isso, percebemos que $[H_0, \mathbf{p}] = 0$ e usamos uma base de autokets de $\mathbf{p} \rightarrow |\mathbf{k}'\rangle$ com $\langle \mathbf{k}'|\mathbf{k}''\rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')$. Quando necessário, outra nomenclatura: $\{|E, \hat{\mathbf{k}}\rangle\}$.

Acontece que $[H_0, \mathbf{L}^2] = [H_0, L_z] = 0$ e poderíamos procurar por uma base

$$\{|E,\ell,m\rangle\} \text{ tal que } \begin{cases} H_0|E,\ell,m\rangle = E|E,\ell,m\rangle \\ \mathbf{L}^2|E,\ell,m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2|E,\ell,m\rangle \\ L_z|E,\ell,m\rangle = m\hbar|E,\ell,m\rangle \\ \langle E',\ell',m'|E,\ell,m\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta(E-E') \end{cases}$$

Pergunta: como a base $\{|\mathbf{k}\rangle\}$ se relaciona com a base $\{|E,\ell,m\rangle\}$?

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

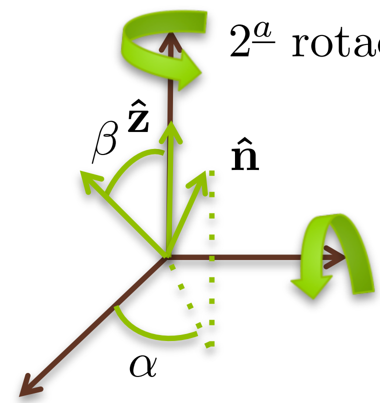
Sabemos fazer esta conexão: $|E,\ell,m\rangle = \int d^3k|\mathbf{k}\rangle \underbrace{\langle\mathbf{k}|E,\ell,m\rangle}_{\textit{precisamos achar isso}}$

Um chute, baseado nas propriedades esperadas: $\langle\mathbf{k}|E,\ell,m\rangle = Ag_{\ell E}(k)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})$

Como provar que a fórmula escolhida para $\langle\mathbf{k}|E,\ell,m\rangle$ é apropriada?

Se acharmos a conexão com $|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$, podemos rodá-lo para obter $|\mathbf{k}\rangle$, pois

$$|\mathbf{k}\rangle = \mathcal{D}(\alpha=\phi,\beta=\theta,\gamma=0)|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$$



Assim vamos atrás de $|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$. Sabendo que $|k\hat{\mathbf{z}}\rangle = |k_x=0,k_y=0,k_z\rangle$ aplique L_z para obter $L_z|k\hat{\mathbf{z}}\rangle = (xp_y - yp_x)|k_x=0,k_y=0,k_z\rangle = 0$, pois p_y(ou p_x)$|k_x=0,k_y=0,k_z\rangle = 0$. Onde se conclui: *momento angular é nulo na direção de propagação.* Classicamente já era, pois $\mathbf{L}.\mathbf{p} = (\mathbf{r}\times\mathbf{p}).\mathbf{p} = 0$. Mas, se $L_z|k\hat{\mathbf{z}}\rangle = 0 \rightarrow |k\hat{\mathbf{z}}\rangle$ é autoket de L_z com autovalor 0. Ao mesmo tempo, $L_z|E,\ell,m\rangle = m\hbar|E,\ell,m\rangle$. Isto implica que $\langle E',\ell',m'|k\hat{\mathbf{z}}\rangle = 0$, se $m' \neq 0$ (autokets de um operador Hermiteano com autovalores distintos são ortogonais). Com isso aprendemos algo:

$|k\hat{\mathbf{z}}\rangle = \sum_{\ell' m'} \int dE'|E',\ell',m'\rangle\langle E',\ell',m'|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$ pode ser reduzido à

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

$$\Longrightarrow \qquad |k\hat{\mathbf{z}}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' |E', \ell', m' = 0\rangle \langle E', \ell', m' = 0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$$

Uma vez que $|\mathbf{k}\rangle = \mathcal{D}(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$, podemos escrever:

$$\langle E, \ell, m|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' \langle E, \ell, m|\mathcal{D}(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)|E', \ell', m' = 0\rangle \times$$

$\times \langle E', \ell', m' = 0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$. Lembre que $\mathcal{D}$ é de fato um operador que depende apenas de L_i $\Big($sua forma geral é $\mathcal{D} = \exp\big(-i\frac{J_z\alpha}{\hbar}\big)\exp\big(-i\frac{J_y\beta}{\hbar}\big)\exp\big(-i\frac{J_z\gamma}{\hbar}\big)\Big)$ e $\therefore$ é incapaz de mudar ℓ' e E'. Com isso em mente, podemos escrever:

$$\langle E, \ell, m|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' \delta(E' - E)\delta_{\ell'\ell} \underbrace{\mathcal{D}^{(\ell')}_{m0}(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)}\langle E', \ell', m' = 0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$$

Isso é conhecido, fórmula 3.6.52 *do livro,* $\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell'}^{m\,*}(\hat{\mathbf{k}})$. Assim, obtemos que $\langle E, \ell, m|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell}^{m\,*}(\hat{\mathbf{k}})\langle E, \ell, m=0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$. Tome o complexo conjugado para comparar com fórmula do slide anterior, e conclua que a proposta estava correta, pois $g_{\ell E}(k) = \langle E, \ell, m = 0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle^* \rightarrow$ não depende de θ e ϕ e depende apenas de E, k e ℓ. E assim, $\boxed{\langle \mathbf{k}|E, \ell, m\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}g_{\ell E}(k)Y_{\ell}^{m}(\hat{\mathbf{k}}).}$

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

Para calcular $g_{\ell E}(k)$, comece com $(H_0 - E)|E,\ell,m\rangle = 0$ e multiplique pela esquerda por $\langle \mathbf{k}|$ para obter:

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right)\langle \mathbf{k}|E,\ell,m\rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{k}|E,\ell,m\rangle = 0 \text{ sempre que } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \neq E \ \therefore$$

dois estados do contínuo

$\langle \mathbf{k}|E,\ell,m\rangle$ é uma função delta. Podemos escrever isso da seguinte forma

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right)g_{\ell E}(k)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = 0 \text{ (ver slide 2) com } g_{\ell E}(k) = N\delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right)$$

Para achar N, que tal usarmos $\langle E',\ell',m'|E,\ell,m\rangle = \delta(E-E')\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} =$

$$= \int d^3k''\langle E',\ell',m'|\mathbf{k}''\rangle\langle \mathbf{k}''|E,\ell,m\rangle = \frac{4\pi}{2\ell+1}\int k''^2 dk'' \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''} g^*_{\ell' E'}(k'')\times$$

$$\times\, g_{\ell E}(k'')Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'')Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}'') = \frac{4\pi}{2\ell+1}\int k''^2 dk'' \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''}|N|^2\delta\left(\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} - E'\right)\times$$

$$\times\, \delta\left(\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} - E\right)Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'')Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}'').$$

Se considerarmos que $\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} = E'' \Rightarrow \frac{\hbar^2 k''}{m}dk'' = dE'' \Rightarrow k''^2 dk'' = \frac{m}{\hbar^2}k'' dE''$,

podemos escrever: $\langle E',\ell',m'|E,\ell,m\rangle = \frac{4\pi}{2\ell+1}\int \frac{m}{\hbar^2}k'' dE'' \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''}|N|^2\times$

$\times\, \delta(E''-E')\delta(E''-E)Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'')Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}'')$ e ao fazer a integral, temos

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

$$\langle E',\ell',m'|E,\ell,m\rangle = \frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{m}{\hbar^2}k|N|^2\delta(E'-E)\delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm},$$

faça todas as passagens

onde usamos que $\begin{cases} \int dE'' f(E'')\delta(E''-E')\delta(E''-E) = f(E)\delta(E'-E) \\ \\ \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''} Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'')Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}'') = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm} \end{cases}$

Comparação direta com $\langle E',\ell',m'|E,\ell,m\rangle = \delta(E'-E)\delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$ nos leva à

$|N|^2 = \dfrac{\hbar^2}{mk}\dfrac{2\ell+1}{4\pi} \Rightarrow N = \dfrac{\hbar}{\sqrt{mk}}\sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}$ e finalmente

$\langle \mathbf{k}|E,\ell,m\rangle = \sqrt{\dfrac{4\pi}{2\ell+1}}\dfrac{\hbar}{\sqrt{mk}}\delta\left(\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}-E\right)\sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})$ ou

$$\boxed{\langle \mathbf{k}|E,\ell,m\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-E\right)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})}$$

Podemos usar este resultado para escrever $|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell m}\int dE|E,\ell,m\rangle\langle E,\ell,m|\mathbf{k}\rangle$

ou ainda $\boxed{|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell m}|E,\ell,m\rangle\Big|_{E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}).}$ E o $\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle$?

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} = \sum_{\ell m} \langle \mathbf{x}|E,\ell,m\rangle \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}), \text{ onde } \langle \mathbf{x}|E,\ell,m\rangle = c_\ell j_\ell(kr) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})$$

faça

Para casa (1): *mostre que* $c_\ell = \frac{i^\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{2mk}{\pi}}$. *Para isso, use teorema de adição,*

$$\sum_m Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{r}})$$

e que $j_\ell(kr) \equiv \frac{1}{2i^\ell}\int_{-1}^{+1} e^{ik\cos\theta} P_\ell(\cos\theta) d(\cos\theta)$.

Resumo

$$\langle \mathbf{k}|E,\ell,m\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - E\right) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})$$

$$\langle \mathbf{x}|E,\ell,m\rangle = \frac{i^\ell}{\hbar}\sqrt{\frac{2mk}{\pi}} j_\ell(kr) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})$$

faça

Para casa (2): *analise o decaimento* $\mathrm{Ne}^{20^*} \to \mathrm{O}^{16} + \mathrm{He}^4$, *considerando que o "pai"* (Ne^{20^*}) *está inicialmente com spin* 1 *e que os filhos* ($\mathrm{O}^{16} + \mathrm{He}^4$) *ficam ambos com spin zero.*

Ondas parciais e deslocamentos de fase

O método de ondas parciais para o problema de espalhamento.

Considere $V \neq 0$, mas (para simplificar) $V(\mathbf{x}) = V(r) \Rightarrow \begin{cases} [V, L^2] = 0 \\ [V, L_z] = 0 \end{cases}$

O operador de transição T definido anteriormente por:

$$T = V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon}V + V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon}V\frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon}V + \ldots$$

também comuta com $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L} \rightarrow \therefore\ T$ é um operador escalar. Aplicação do teorema de Wigner-Eckart $\langle \alpha', j'm'|S|\alpha, jm\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}\dfrac{\langle \alpha', j'||S||\alpha, j\rangle}{\sqrt{2j+1}}$
lousa
onde a barra dupla, indica que não depende de m e m', permite escrever

$$\boxed{\langle E, \ell' m'|T|E, \ell m\rangle = T_\ell(E)\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}}$$

Isso traz uma **mensagem importante:**

O potencial esfericamente simétrico não consegue alterar ℓ e m *no processo de espalhamento.*

Ondas parciais e deslocamentos de fase

A amplitude de espalhamento $f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}(2\pi)^3\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle$ pode ser escrita por:

|k'|=|k|

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}(2\pi)^3\sum_{\ell m}\sum_{\ell' m'}\int dE\int dE'\langle\mathbf{k}'|E',\ell',m'\rangle\langle E',\ell',m'|T|E,\ell,m\rangle\langle E,\ell,m|\mathbf{k}\rangle$$

Usando que $\begin{cases}\langle\mathbf{k}|E,\ell,m\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-E\right)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) \\ \langle E',\ell'm'|T|E,\ell m\rangle = T_\ell(E)\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\end{cases}$ $\Longrightarrow$ obtemos:

E'=E

faça todas as passagens

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}(2\pi)^3\frac{\hbar^2}{mk}\sum_{\ell m}T_\ell(E)\Big|_{E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}')Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}})$$

ou melhor: $$\boxed{f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2}{k}\sum_{\ell m}T_\ell(E)\Big|_{E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}')Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}})}$$

Para obter a dependência angular da amplitude de espalhamento, vamos escolher $\hat{\mathbf{k}}$ na direção $\hat{\mathbf{z}}$ (direção do feixe incidente no referencial do laboratório). Nestas condições $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = Y_\ell^m(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m0}$

faça

mostre

Ondas parciais e deslocamentos de fase

A amplitude de espalhamento fica

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2}{k}\sum_\ell T_\ell(E)\big|_{E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}} Y_\ell^0(\hat{\mathbf{k}}')\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}},\ \text{onde}\ (mostre)$$

faça

$Y_\ell^0(\hat{\mathbf{k}}') = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$. Definindo, $f_\ell = -\frac{\pi}{k}T_\ell(k)$, temos

$$\boxed{f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)f_\ell(k)P_\ell(\cos\theta)}$$

Para entender o significado físico de $f_\ell(k)$, vamos estudar o comportamento à longas distâncias de $\langle\mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$, isto é:

$$\boxed{\lim_{r\to\infty}\langle\mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(e^{ik.z} + \frac{e^{ikr}}{r}f(\theta)\right)}$$

faça

Do slide 6, temos $e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1)i^\ell j_\ell(kr)P_\ell(\cos\theta)$ onde $(mostre)$

$$\lim_{r\to\infty} j_\ell(kr) = \frac{e^{+i(kr-\ell\pi/2)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{2ikr} = \underbrace{e^{-i\ell\pi/2}}_{i^{-\ell}}\left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}\right)$$

assim $\boxed{\lim_{r\to\infty} e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}\right)}$

Ondas parciais e deslocamentos de fase

Colocando os resultados das caixa verdes na caixa azul do slide anterior, temos:

$$\lim_{r\to\infty}\langle\mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{e^{+ikr}-e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr}+\frac{e^{ikr}}{r}f_\ell(k)\right)$$

$$\lim_{r\to\infty}\langle\mathbf{x}|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\ell}(2\ell+1)\frac{P_\ell(\cos\theta)}{2ik}\left(\underbrace{[1+2ikf_\ell(k)]}_{\substack{\text{o potencial só afeta a}\\ \text{onda esférica que sai}}}\frac{e^{+ikr}}{r}-\frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r}\right)$$

O coeficiente da onda esférica emergente $[1+2ikf_\ell(k)]=1,$ se $V=0.$

Se construíssemos pacotes, o pacote associado à $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ só existiria p/ $cte\leq t\leq\infty$ e o associado à $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$ só existiria p/ $-\infty\leq t\leq cte'$. Assim, como o $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ contém a informação completa (antes e depois da colisão), é de se esperar que:

$\oint \mathbf{J}.\mathbf{dS}=0.$ As partículas que entram devem sair (se não há ralos e fontes).

Assim, o fluxo associado à $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ deve ser igual ao fluxo associado à $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$. Isso deve valer para cada onda parcial. Para calcular esses fluxos, defina antes

$$S_\ell\equiv 1+2ikf_\ell(k).$$

Ondas parciais e deslocamentos de fase

Assim, a partir de $\mathbf{J} = \dfrac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\psi^* \boldsymbol{\nabla}\psi)$ podemos escrever

$$\left| \int r^2 d\Omega \mathrm{Im}\left(S_\ell^* \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} S_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right| = \left| \int r^2 d\Omega \mathrm{Im}\left(\frac{e^{+i(kr-\ell\pi)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r} \right) \right|$$

$$4\pi |S_\ell|^2 = 4\pi \Longrightarrow |S_\ell| = 1 \text{ (fruto da conservação de fluxo).}$$

Se $|S_\ell| = 1$, é sugestiva a seguinte definição: $S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ $\begin{cases} \delta_\ell \equiv \begin{cases} \text{deslocamento} \\ \text{de fase} \end{cases} \\ \delta_\ell \to \text{número real} \\ \text{o 2 é convenção} \end{cases}$

O que deixa claro que a existência do potencial pode no máximo infligir uma mudança de fase na onda esférica emergente. Como $S_\ell \equiv 1 + 2ikf_\ell(k)$,

podemos escrever $f_\ell(k) = \dfrac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} = \underbrace{\dfrac{e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell}{k}} = \dfrac{\sin\delta_\ell}{ke^{-i\delta_\ell}} = \dfrac{\sin\delta_\ell}{k(\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell)}$

Ou ainda $\underbrace{f_\ell(k) = \dfrac{1}{k(\cot\delta_\ell - i)}}_{\text{está forma será útil}}$. Assim, $f(\theta) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)$

slide 9

Note que para deduzir isso, usamos apenas Invariança Rotacional e conservação de probabilidade.

slide 7

Elementos de Matriz de Operadores Tensoriais e Teorema de Wigner-Eckart (aula 25 de FI001 slide 10)

O elemento de matriz $\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle$ é importante, pois entre outras, coisas, pode expressar interações de campos eletromagnéticos com átomos e núcleos.

1) **Regra m de Seleção:** $\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = 0$ salvo se $m' = q + m$

Demonstração:

Para provar, basta lembrar que: $[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$ e calcular o elemento de matriz: $\langle\alpha', j'm'|\left([J_z, T_q^{(k)}] - \hbar q T_q^{(k)}\right)|\alpha, jm\rangle = 0$ que implica em:

$$(m' - m - q)\hbar\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = 0,$$

ou seja se $m' \neq m + q \rightarrow \langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = 0$

2) **Teorema de Wigner-Eckart**:

$$\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = \underbrace{\langle jk; mq|jk; j'm'\rangle}_{\text{não depende de } T^{(k)}} \overbrace{\frac{\langle\alpha' j'||T^{(k)}||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}}^{\text{não depende de } m, m' \text{e } q}$$

onde $|j - k| \leq j' \leq j + k$.