Quantização do campo eletromagnético

As equações de Maxwell fornecem uma descrição clássica completa de campos elétricos e magnéticos que não interagem no espaço "vazio". A descrição destes campos na Mecânica Quântica têm seus truques e iremos, levemente, explorá-los nesta aula. Usaremos o formalismo de partículas idênticas desenvolvido nas aulas passadas para este fim. As "partículas" envolvidas, como vocês já devem ter imaginado, são os fótons (obedecem a estatística de Bose-Einstein).

Equações de Maxwell no espaço livre (de cargas e correntes).

$$\begin{cases} (1) & \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{x},t) \\ (2) & \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{B} = 0 \\ (3) & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ (4) & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{x},t) \end{cases} \quad \text{para} \quad \begin{cases} \rho(\mathbf{x},t) = 0 \\ \text{e} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t) = 0 \end{cases} \quad \text{temos} \quad \begin{cases} (1) & \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{E} = 0 \\ (2) & \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{B} = 0 \\ (3) & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ (4) & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

O procedimento tradicional é postular um potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$, tal que $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ (para satisfazer a equação (2)). Sem cargas e correntes é usual utilizar o Gauge de Coulomb, onde $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow$ Equações (1) e (3) também ficam satisfeitas. A equação (4) é satisfeita se $\mathbf{A}$ for solução de:

lousa

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)}{\partial t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0}$$

Quantização do campo eletromagnético

Ou seja, o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$, satisfaz uma equação de onda, que viaja com a velocidade da luz, c, conforme previsto.

Soluções para $\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(\mathbf{k})e^{\pm i\mathbf{k}.\mathbf{x}}e^{\pm i\omega_k t}$ com $\omega_k = |\mathbf{k}|c$

Note que o Gauge de Coulomb $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{k}.\mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$ e $\therefore\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \perp \mathbf{k}$.

O potencial vetor é perpendicular à direção de propagação. Por esta razão, o Gauge de Coulomb é conhecido por Gauge transversal. A notação da solução geral pode ser simplificada para $\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x},t)}$ onde $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ são dois versores (dois valores de λ) perpendiculares à $\mathbf{k}$ e a forma geral para $A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x},t)$ fica

$$\boxed{A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x},t) = A_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}.\mathbf{x})} + A^*_{\mathbf{k}\lambda}e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k}.\mathbf{x})}}$$

Note que $A_{\mathbf{k}\lambda}$ ($\mathbf{x}$,t) é uma função escalar!

Note que $\mathbf{k}$ e $-\mathbf{k}$ *correspondem a diferentes termos na soma e que* $A_{\mathbf{k}\lambda}$ *e* $A^*_{\mathbf{k}\lambda}$ *são números (não são funções de* $\mathbf{r}$ e t*). Note também que a equação diferencial que define* $\mathbf{A}$ é linear e $\therefore$ *combinação de soluções também é uma solução. Estamos somando e não integrando por que faremos a normalização da caixa.*

A forma de $A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x},t)$ é para garantir que $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ seja real e seu análogo quântico Hermiteano.

Quantização do campo eletromagnético

Como veremos que será útil, é melhor tomar os vetores unidade $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ nas direções de polarização circular, ao invés da polarização linear. Ou seja: se a polarização linear tem direções $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)}$ e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}$, perpendiculares à $\mathbf{k}$, tomaremos

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} \pm i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}),$$

lousa

que possui as seguintes propriedades (mostre) $\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}^*_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\pm\mathbf{k}\lambda'} = \pm\delta_{\lambda\lambda'} \\ \hat{\mathbf{e}}^*_{\mathbf{k}\lambda} \times \hat{\mathbf{e}}_{\pm\mathbf{k}\lambda'} = \pm i\lambda\delta_{\lambda\lambda'}\hat{\mathbf{k}} \end{cases}$

onde $\hat{\mathbf{k}}$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{k}$.

ver, na nossa página, a contribuição do Murilo (2020)

Os campos elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, e magnético, $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, podem ser escritos por

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}\left(A_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i(\omega_k t-\mathbf{k}.\mathbf{x})} + A^*_{\mathbf{k}\lambda}e^{+i(\omega_k t-\mathbf{k}.\mathbf{x})}\right)\right) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}\left(A_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i(\omega_k t-\mathbf{k}.\mathbf{x})} + A^*_{\mathbf{k}\lambda}e^{+i(\omega_k t-\mathbf{k}.\mathbf{x})}\right)\right) \end{cases}$$

Quantização do campo eletromagnético

A energia no campo eletromagnético é dada pela integração da densidade de energia no espaço todo, isto é:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int_V \left[\left|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\right|^2 + \left|\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\right|^2\right]$$

onde espaço todo é, como antes, o volume $V = L^3$ com condições periódicas de contorno. Na linguagem do eletromagnetismo estamos em uma cavidade imensa com paredes condutoras, o que significa $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ com $n_x,\ n_y$ e n_z inteiros.

Do slide anterior, podemos calcular o campo elétrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{c}\left(\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}\big(A_{\mathbf{k}\lambda}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}.\mathbf{x})} + A^*_{\mathbf{k}\lambda}\frac{\partial}{\partial t}e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k}.\mathbf{x})}\big)\right) =$$

$$= \frac{i}{c}\sum_{\mathbf{k},\lambda}\omega_k\left[A_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}.\mathbf{x})} - A^*_{\mathbf{k}\lambda}e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k}.\mathbf{x})}\right]\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$$

e seu complexo conjugado (para o primeiro termo de $\mathcal{E}$)

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{x},t) = -\frac{i}{c}\sum_{\mathbf{k}',\lambda'}\omega_{k'}\left[A^*_{\mathbf{k}'\lambda'}e^{+i(\omega_{k'} t - \mathbf{k}'.\mathbf{x})} - A_{\mathbf{k}'\lambda'}e^{-i(\omega_{k'} t - \mathbf{k}'.\mathbf{x})}\right]\hat{\mathbf{e}}^*_{\mathbf{k}'\lambda'}$$

As variáveis $A_{\mathbf{k}\lambda}$ e $A^*_{\mathbf{k}\lambda}$ vão virar operadores de criação e aniquilação: $\therefore$ mantenha a ordem ao realizar o produto!

lousa

Quantização do campo eletromagnético

Ao colocar este resultado na expressão da energia, mantendo a ordem dos futuros operadores $A_{\mathbf{k}\lambda}$ e $A^*_{\mathbf{k}\lambda}$, teríamos duas somas (com linha e sem linha) de quatro produtos que pode ser simplificada, lembrando que as ondas livres são ortogonais, isto é $\int_V e^{i(\mathbf{k}\mp\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3x = V\delta_{\mathbf{k},\pm\mathbf{k}'}$. Isso permite escrever

$$\boxed{\int_V \left|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\right|^2 d^3x = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} V\left[A^*_{\mathbf{k}\lambda}A_{\mathbf{k}\lambda} + A_{\mathbf{k}\lambda}A^*_{\mathbf{k}\lambda} + A^*_{\mathbf{k}\lambda}A^*_{-\mathbf{k}\lambda}e^{2i\omega_k t} + A_{\mathbf{k}\lambda}A_{-\mathbf{k}\lambda}e^{-2i\omega_k t}\right]}$$

O que muda para a contribuição do campo magnético? O efeito do rotacional, na prática troca o $\frac{\omega_k}{c}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ por $\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$. Como ambos têm o mesmo módulo, pois $|\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}|^2 = |\mathbf{k}|^2 = \omega_k^2/c^2 = k^2$, a diferença está apenas no fato que na troca

$$\mathbf{k}\to-\mathbf{k}\ \begin{cases}\hat{\mathbf{e}}^*_{\mathbf{k}\lambda}.\hat{\mathbf{e}}_{-\mathbf{k}\lambda'} = -1\delta_{\lambda,\lambda'} \\ (\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})^*(-\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_{-\mathbf{k}\lambda'}) = 1\delta_{\lambda,\lambda'}\end{cases}$$

e com isso a contribuição do campo magnético fica:

$$\boxed{\int_V \left|\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\right|^2 d^3x = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} V\left[A^*_{\mathbf{k}\lambda}A_{\mathbf{k}\lambda} + A_{\mathbf{k}\lambda}A^*_{\mathbf{k}\lambda} - A^*_{\mathbf{k}\lambda}A^*_{-\mathbf{k}\lambda}e^{2i\omega_k t} - A_{\mathbf{k}\lambda}A_{-\mathbf{k}\lambda}e^{-2i\omega_k t}\right]}$$

Fótons e Quantização da Energia

Com isso a energia no campo eletromagnético fica dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int_V \left[\left|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\right|^2 + \left|\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\right|^2\right] = \frac{1}{4\pi}V\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{\omega_k^2}{c^2}\left[A^*_{\mathbf{k}\lambda}A_{\mathbf{k}\lambda} + A_{\mathbf{k}\lambda}A^*_{\mathbf{k}\lambda}\right]$$

Nosso objetivo agora é associar esse valor de energia ao autovalor de um operador Hermiteano. Fazemos isso com a hipótese sobre o campo eletromagnético seja composto por uma coleção de partículas idênticas chamadas fótons.

$$\text{Para isso definiremos}\begin{cases} a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases}\text{um operador que cria um fóton}\\ \text{com polarização } \lambda, \text{momento } \hbar\mathbf{k},\\ \text{e energia } \hbar\omega_k = \hbar c k.\end{cases} \\ \\ a_\lambda(\mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases}\text{um operador que aniquila um fóton}\\ \text{com polarização } \lambda, \text{momento } \hbar\mathbf{k},\\ \text{e energia } \hbar\omega_k = \hbar c k.\end{cases}\end{cases}$$

Com a hipótese de que os fótons não interagem, a Hamiltoniana é aditiva de uma partícula, que conforme vimos, pode ser escrita por:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda}\hbar\omega_k a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k})$$

Fótons são bósons ou férmions? Qual é o spin do fóton?

Um tratamento relativístico mostraria que fótons têm spin 1. Balançando um pouco as mãos é possível mostrar, sem a relatividade, que isso está correto. Na disciplina FI001, capítulo 3 de nosso livro texto, vimos que o operador que roda em φ ao redor do eixo z é o $e^{-iJ_z\varphi/\hbar}$. Os autovalores, $m\hbar$, de J_z, aparecem explicitamente se rodarmos autoestados deste operador, pois

$$e^{-iJ_z\varphi/\hbar}|j,m\rangle = e^{-im\varphi}|j,m\rangle.$$

Lembre que isso deu origem ao -1 *quando rodamos estados de spin* $\frac{1}{2}$ de 2π.

Com isso em mente, o que acontece quando rodamos um fóton, circularmente polarizado, sob o eixo $\mathbf{k}$ de sua propagação? As direções de polarização são definidas pelos vetores unidades, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm}$, conforme vimos no slide 3. Para rodá-los, note que

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} \to \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)\prime} = \cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} - \sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)} \\ \\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)} \to \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)\prime} = \sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} + \cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)} \end{cases}$$

Assim: $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} \pm i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}) \to \hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{k}\pm} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\big((\cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} - \sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}) +$

$$\pm i(\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} + \cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)})\big) = e^{\pm i\varphi}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm} \Rightarrow m = \pm 1$$

Esperamos que o estado que representa um fóton rode conforme roda sua polaridade. *Isso sugere que os fótons têm spin 1!*

Quantização do campo eletromagnético: A Hamiltoniana

A Hamiltoniana do sistema de fótons, bósons idênticos, pode ser re-escrita por:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2}\hbar\omega_k \left[a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k})\right]$$

Podemos deixar esta expressão parecida com o resultado clássico, se usarmos a regra de comutação dos operadores de criação e aniquilação de bósons no segundo termo. Isto é:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2}\hbar\omega_k \left[a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + a_\lambda(\mathbf{k}) a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) + 1\right]$$

Note que com a definição $A_{\mathbf{k}\lambda} = (4\pi\hbar c^2)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_\lambda(\mathbf{k})$, os dois primeiros termos fornecem a expressão clássica. *A novidade está no último termo!*

As energias de um campo de fótons são medidas relativas à um ponto zero, dado por

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2}\hbar\omega_k = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k$$

ver, na nossa página, a contribuição do Leonardo (2020)

Esta é a energia no campo eletromagnético, quando existem zero fótons presentes. Ela é chamada de energia do vácuo. É um número infinito, porém constante. Uma manifestação macroscópica é o efeito Casimir, força atrativa entre superfícies metálicas → **leitura para casa.**

Quantização do campo eletromagnético

Neste curso demos apenas uma olhada rápida e superficial na quantização do campo eletromagnético. Com a definição de criadores $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ e aniquiladores de fótons $a_\lambda(\mathbf{k})$, abre-se um universo de aplicações, por meio da relação

$$A_{\mathbf{k}\lambda} = (4\pi\hbar c^2)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_\lambda(\mathbf{k})$$

Vimos no semestre passado, em FI001, como podemos incorporar o campo eletromagnético na Hamiltoniana. Bastava adicionar o potencial vetor ao operador momento linear, $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, onde termos, do tipo $\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}$, podem ser tratados como perturbação. Usando a versão quantizada de $\mathbf{A}$, teremos uma Hamiltoniana que pode criar e destruir fótons. Podendo, por exemplo, ter fótons absorvidos por átomos, ou átomos, em estados excitados, decaírem espontaneamente, emitindo um fóton.

Lousa

slide 1

De fato $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{A})-\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A},$ mas $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{A}=0$

slide 3

Para achar $\hat{\mathbf{e}}_{\pm\mathbf{k}\lambda},$ use que $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}=\hat{\mathbf{k}};\quad \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)};\quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)}=\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}$
ou melhor, o que roda no sentido horário para $\hat{\mathbf{k}},$ roda no sentido anti-horário para $-\hat{\mathbf{k}},$ de tal modo que (sugestão do autor)$-\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_{-\mathbf{k}\lambda}=\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ (será?)

slide 4

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{i}{c}\sum_{\mathbf{k},\lambda}\omega_k\left[A_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i(\omega_k t-\mathbf{k}.\mathbf{x})}-A^*_{\mathbf{k}\lambda}e^{+i(\omega_k t-\mathbf{k}.\mathbf{x})}\right]\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$$

e seu complexo conjugado

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{x},t)=-\frac{i}{c}\sum_{\mathbf{k}',\lambda'}\omega_{k'}\left[A^*_{\mathbf{k}'\lambda'}e^{+i(\omega_{k'} t-\mathbf{k}'.\mathbf{x})}-A_{\mathbf{k}'\lambda'}e^{-i(\omega_{k'} t-\mathbf{k}'.\mathbf{x})}\right]\hat{\mathbf{e}}^*_{\mathbf{k}'\lambda'},$$

podemos escrever a densidade de energia devido ao campo elétrico

$$\int_V\left|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\right|^2 d^3x=\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{\omega_k^2}{c^2}V\left[A^*_{\mathbf{k}\lambda}A_{\mathbf{k}\lambda}+A_{\mathbf{k}\lambda}A^*_{\mathbf{k}\lambda}+\right.$$
$$\left.+A^*_{\mathbf{k}\lambda}A^*_{-\mathbf{k}\lambda}e^{2i\omega_k t}+A_{\mathbf{k}\lambda}A_{-\mathbf{k}\lambda}e^{-2i\omega_k t}\right]$$

Usaremos que $\int_V e^{i(\mathbf{k}\mp\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}d^3x=V\delta_{\mathbf{k},\pm\mathbf{k}'}.$