Indice

Vetores

Introdução - Existem grandezas tais como massa, comprimento e tempo, que podem ser caracterizadas por um número e uma unidade. São as grandezas escalares. Outras, como velocidade e força, dependem de uma direção e um sentido, além de um número e uma unidade. São as grandezas vetoriais.
A matemática desenvolveu uma álgebra vetorial que nos permite trabalhar com essas grandezas.

Representação - A representação geométrica do vetor é feita por uma flecha como mostra a figura 1. O módulo ou intensidade é dado pelo comprimento da flecha. O sentido e a direção são dados pela ponta da flecha e pelas retas paralelas à flecha respectivamente.

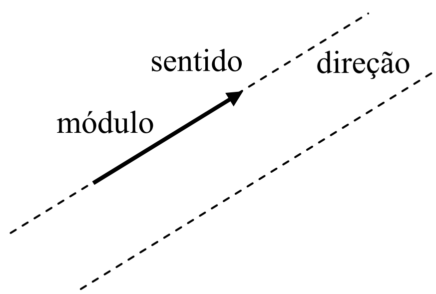


Figura 1: Representação geométrica de um vetor

Para se escrever "vetor a", usa-se a nomenclatura $\vec{a}$ ou **a** (em negrito). Para módulo de **a**, usa-se $|\vec{a}|$, $|\mathbf{a}|$ ou simplesmente a.

Propriedades - Além de direção e sentido, uma grandeza para ser vetorial tem que ter algumas propriedades. São elas:
1) se **a** e **b** têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido (figura 2), então **a** = **b ;**

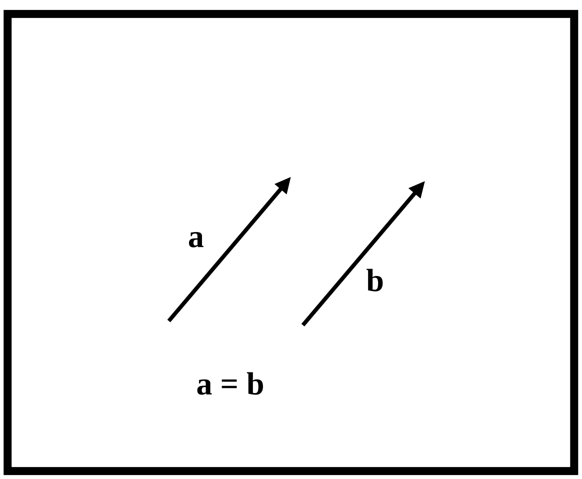


Figura 2: Dois vetores de mesmo módulo, direção e sentido, portanto iguais.

2) Se **a** é um vetor e *k* é um escalar, então *k***a** é um vetor que tem a mesma direção de **a (**figura 3).

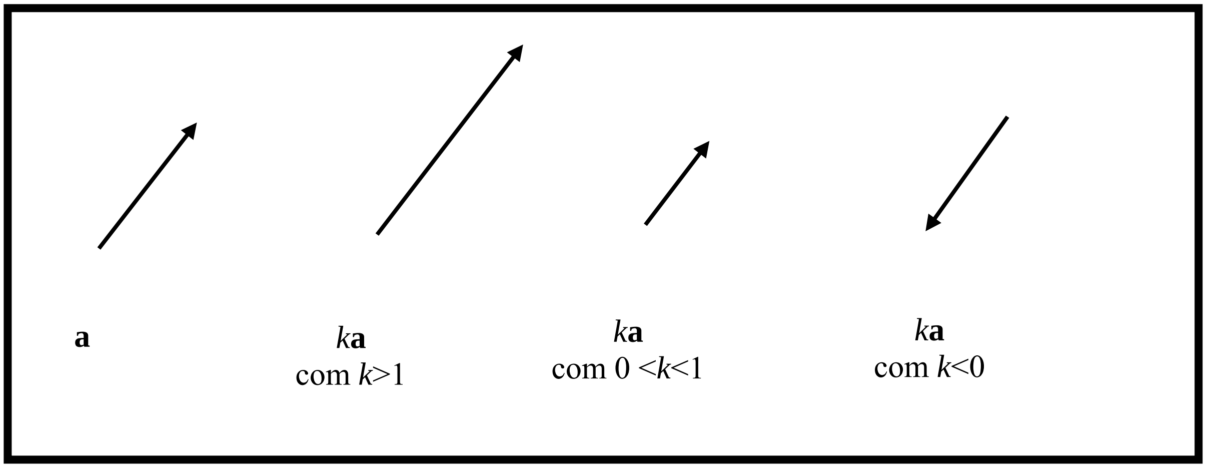


*Figura 3: O vetor k**a** tem a mesma direção de **a** mas não o mesmo módulo nem necessariamente o mesmo sentido*

3) A soma vetorial é comutativa, isto é: **a** + **b** = **b** + **a**

4) A soma vetorial é associativa: **a** + **b + c = (a + b) + c = a + (b + c)**

A representação geométrica da soma de dois ou mais vetores se faz desenhando o primeiro vetor e, em seguida, cada vetor com sua origem na extremidade do anterior. O vetor resultante é o que tem sua origem coincidente com a do primeiro vetor e sua extremidade junto à extremidade do último, conforme mostra a figura 4.

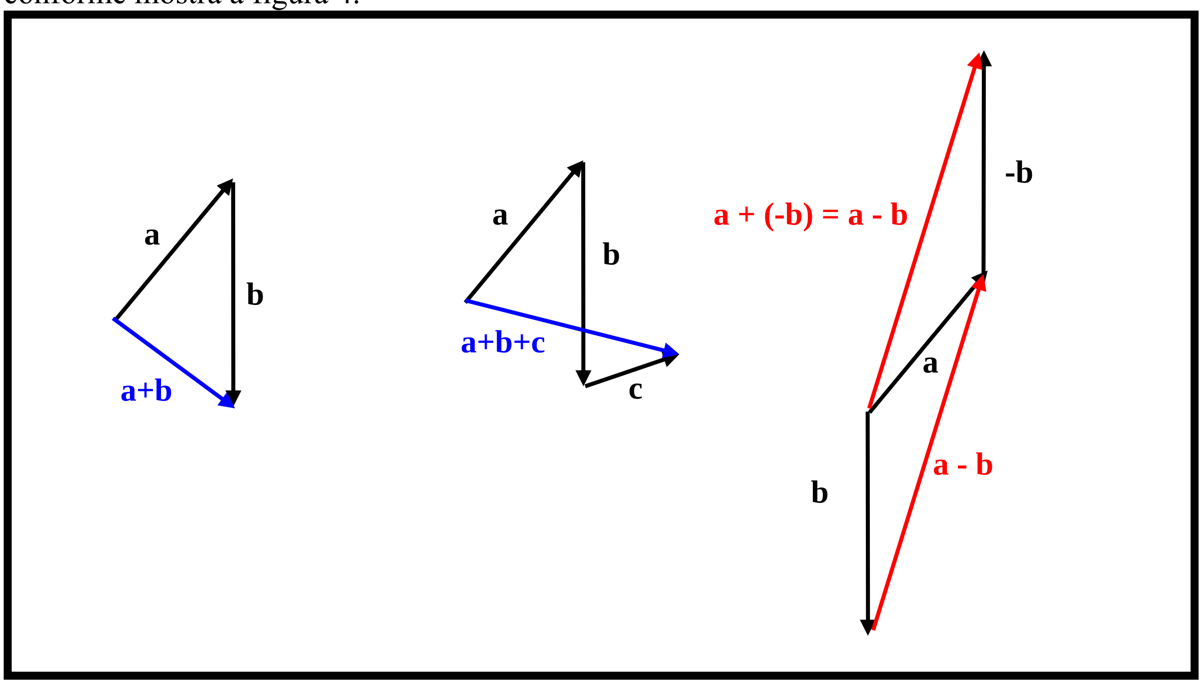


*Figura 4: Soma de dois (**a** e **b**) e três vetores (**a**,**b** e **c**). Para a diferença entre **a** e **b** pode-se fazer **a + (-b)** ou, mais diretamente, colocar as origens de **a** e **b** num mesmo por e traçar **a** − **b** ligando as extremidades de **a** e **b** com a orientação de **b** para a de **a**.*

As propriedades comutativa e associativa da soma vetorial podem ser mostradas geometricamente como nas figuras 5a e 5b.

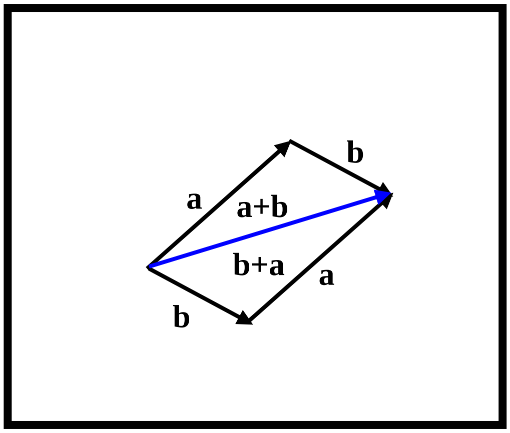


Figura 5-a: Propriedade comutativa: **a+b = b+a**

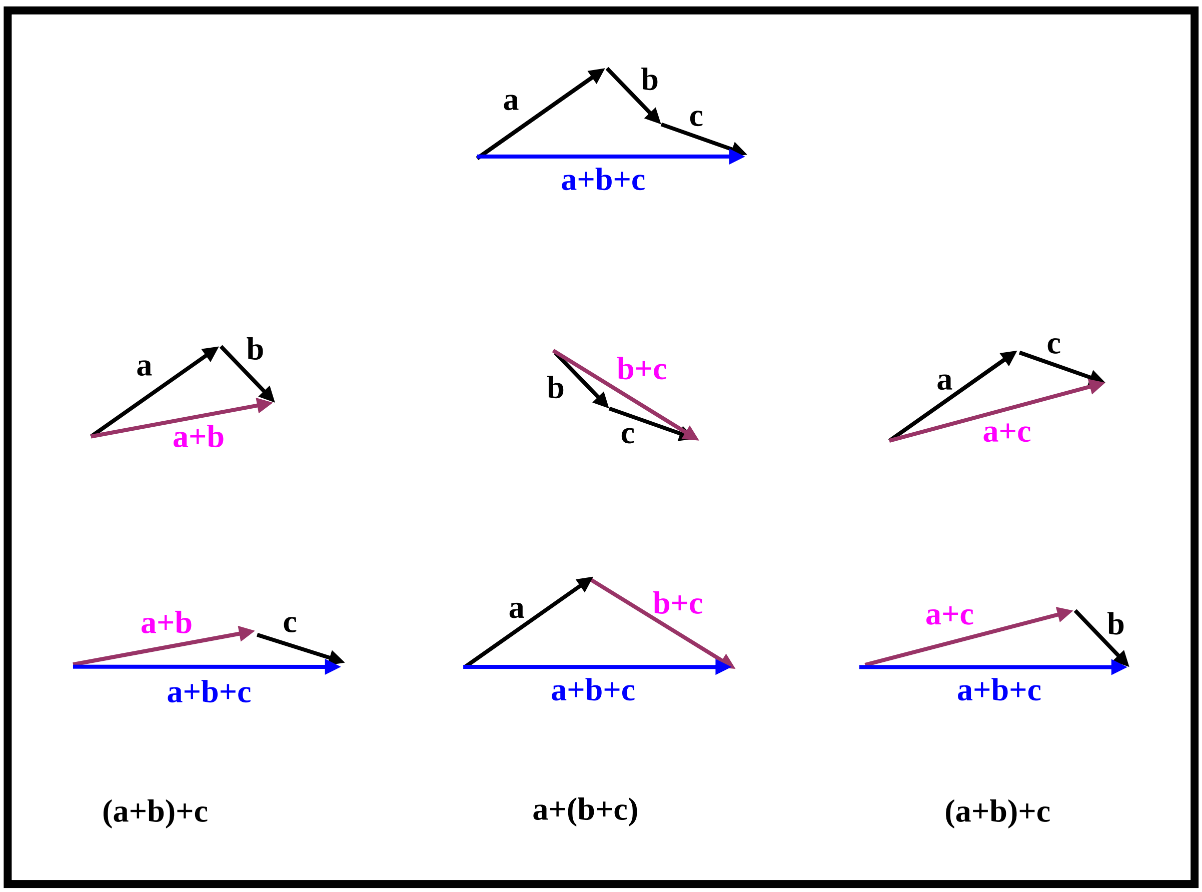
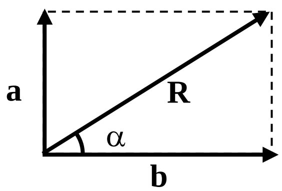


Figura 5-b: Propriedade associativa: **(a+b)+c = a+(b+c) = (a+c)+b**

Exemplo 1: Determine a soma de dois vetores **a** e **b** perpendiculares.



Resolução

Completando o paralelogramo - no caso, retângulo – que tem os vetores **a** e **b** como dois de seus lados, vemos que a diagonal desse paralelogramo segue a regra de soma de vetores.

Portanto, o módulo da resultante* é:

$$R^2=a^2+b^2$$

A direção e o sentido são dados pelo ângulo α que a resultante forma com o vetor **b** (ou **a**). Logo:

$$\text{tg}\alpha = a/b$$

ou seja, $\alpha = \text{arctg}(b/a)$

* Normalmente usa-se o termo *resultante* para qualquer operação vetorial.

Decomposição de vetores - A projeção de um vetor **a** sobre um eixo qualquer é o vetor cuja origem e extremidade são as projeções da origem e da extremidade de **a**, conforme mostra a figura 6.

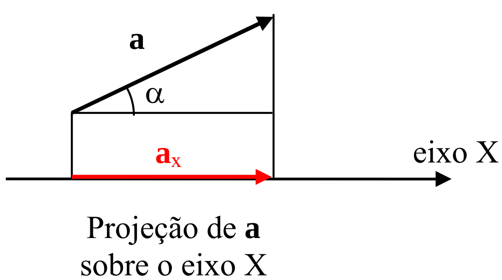
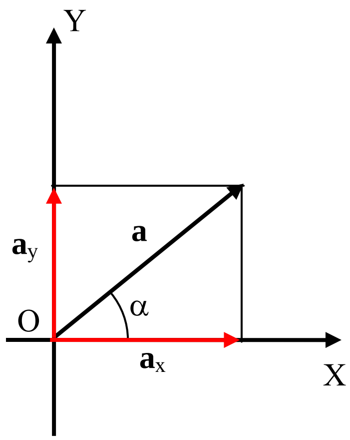
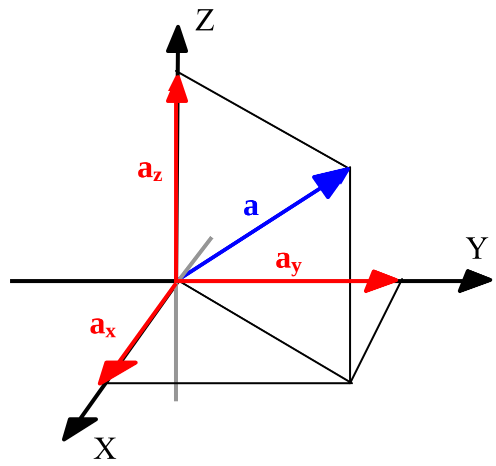


*Figura 6: Projeção de **a** sobre o eixo X*

Da geometria, o módulo da projeção é dado por : $a_x = a\cos\alpha$

Quando projetamos um vetor em dois eixos coordenados, como na figura 7-a, a soma das projeções é o próprio vetor. Como o ângulo (direção e sentido) do vetor com os eixos também pode ser determinado pelas suas projeções, podemos caracterizar completamente um vetor pelas suas projeções. Isto vale também para o espaço tri-dimensional com a projeção do vetor nos eixos x, y e z (figura 7-b). Projetar um vetor nos eixos coordenados é decompor o vetor, e as projeções nos eixo x, y e z recebem os nomes de componentes x, y e z respectivamente.





$a^2 = a_x^2 + a_y^2$

$tg\alpha = \dfrac{a_y}{a_x}$

(a)

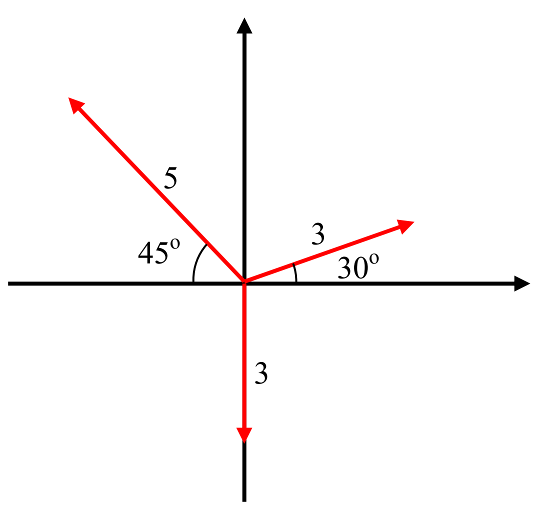
$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

(b)

*Figura 7: As componentes do vetor **a** em (a) duas e (b) três dimensões. A direção e sentido de **a** em três dimensões são determinadas pelos ângulos de **a** com os eixo OX, OY e OZ que podem ser determinados pelas relações trigonométricas entre o vetor e suas projeções.*

Como o vetor pode ser representado por suas componentes, a soma de dois ou mais vetores também pode ser feita somando-se as componentes de cada vetor. As componentes resultantes em x e y serão as componentes do vetor resultante.

Exemplo 2: Determine a soma dos vetores abaixo.



Resolução:
Soma das projeções dos vetores no eixo OX:
$R_x = 3.\cos 30^o - 5.\cos 45^o = 2{,}6 - 3{,}5 = -0.9$

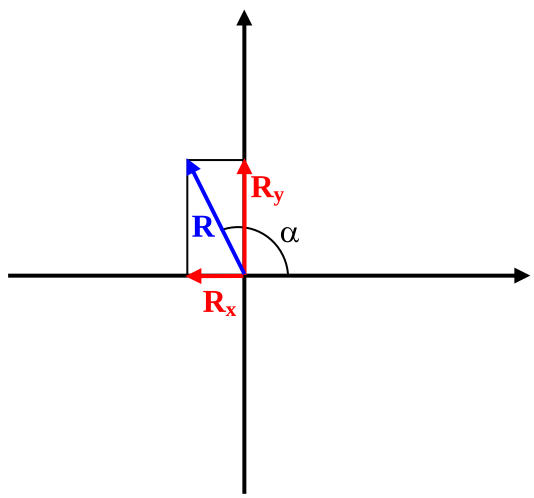
Soma das projeções dos vetores no eixo OY

$R_y = 3.\mathrm{sen}30^o + 5.\mathrm{sen}45^o - 3 = 2$

$R^2 = 0{,}81 + 4 = 4{,}81$

ou seja: $R = 2{,}2$

Representando nos eixos cartesianos, temos:



A direção e o sentido de **R** são dados por α que pode ser calculado como se segue:

$$tg(\alpha - 90^o) = \left| R_x / R_y \right| = 0{,}45 \;\Rightarrow \alpha = 114{,}2^o$$

Vetores unitários - Vetores unitários são vetores de módulo 1 (um). Um vetor unitário multiplicado por um número resulta num vetor de mesma direção e sentido do vetor unitário e módulo igual ao número. Se o número vier acompanhado de uma unidade, esta será também a unidade do módulo do vetor. Assim, se **u** é um vetor unitário, o vetor a**u** é um vetor que tem a direção e o sentido de **u** e módulo igual a *a,* conforme a segunda propriedade dos vetores apresentada neste capítulo.

Representação analítica - A representação geométrica dos vetores é interessante na demonstração de algumas propriedades, mas é inviável quando se pensa em trabalhar com vetores, principalmente em três dimensões. Por isso é usual a utilização de uma representação analítica com a ajuda de vetores unitários. A figura 8 mostra unitários nas direções X,Y e Z de um sistema cartesiano de eixos em três dimensões. Na maior parte da literatura sobre o assunto, esses unitários são designados por $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ respectivamente.

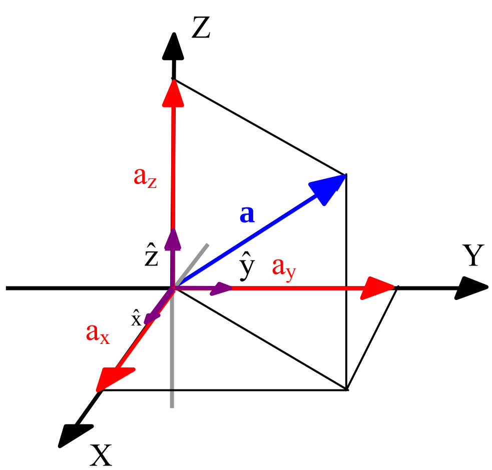


Figura 8: Os *unitários* $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ *e a maneira de escrever um vetor analiticamente*.

Com o uso dos unitários podemos escrever:

$\mathbf{a_x} = a_x\,\hat{x}$ $\mathbf{a_y} = a_y\,\hat{y}$ $\mathbf{a_z} = a_z\,\hat{z}$

Portanto:

$\mathbf{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z}$

O módulo de **a** pode ser calculado por:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Exemplo 3: Um vetor **a** faz um ângulo de 30^o com eixo dos x e tem módulo 4,0 cm. Escreva a expressão analítica deste vetor.

Resolução

Temos: $a_x = 4{,}0.\cos 30^o = 3{,}5$ cm e $a_y = 4{,}0.\text{sen}30^o = 2{,}0$ cm

Analiticamente o vetor se escreve:

$\mathbf{a} = 3{,}5\,\hat{x} + 2{,}0\,\hat{y}$ cm

Exemplo 4: Um vetor **b** é dado por: $\mathbf{b} = -2{,}0\,\hat{x} + 1{,}0\,\hat{y}$ (em cm). Calcule **a + b** e **a – b**, onde **a** é o vetor da aplicação anterior.

Resolução

Como a_x e b_x são as projeções dos vetores **a** e **b** no eixo OX, a soma a_x+b_y será a componente x do vetor **a+b.** Analogamente para a_y+b_y será a componente y de **a+b.** Assim:

$$\mathbf{a+b} = (3{,}5-2{,}0)\,\hat{x} + (2{,}0+1{,}0)\,\hat{y} = 1{,}5\,\hat{x} + 3{,}0\,\hat{y} \quad \text{cm}$$

Se quisermos calcular o módulo de **a+b**, temos:

$$|\mathbf{a+b}|^2 = (1{,}5)^2 + (3{,}0)^2 = 11{,}25$$

Portanto,

$$|\mathbf{a+b}| = 3{,}3 \text{ cm}$$

Por analogia,

$$\mathbf{a-b} = (3{,}5-(-2{,}0))\,\hat{x} + (2{,}0-1{,}0)\,\hat{y} = 5{,}5\,\hat{x} + 1{,}0\,\hat{y} \quad \text{cm}$$

O aluno poderá mostrar que o módulo deste vetor vale: 5,6 cm

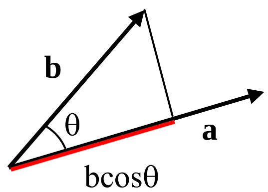
Produto escalar

Define-se o produto escalar do vetor **a** pelo vetor **b (**lê-se **a** escalar **b)** como:

$$\mathbf{a.b} = ab\cos\theta$$

onde a e b são os módulos de **a** e **b** respectivamente e θ é o ângulo entre eles.

Exemplo 5: Mostre que **a.b** é igual a.projeção de **b** sobre **a** multiplicada por a.
Resolução **:**



O produto escalar entre **a** e **b** é**:** **a.b** = abcosθ
Da figura, vê-se que bcosθ é a projeção de **b** sobre **a** o que demonstra o solicitado.

Da definição do produto escalar, podemos deduzir algumas importantes propriedades:

1) O produto escalar é uma grandeza escalar.

2) Se **a** e **b** são perpendiculares entre si, isto é, se $\theta = 90^o$ então **a.b** = 0
Dessa propriedade tiramos que: $\hat{x}.\hat{y} = \hat{x}.\hat{z} = \hat{y}.\hat{z} = 0$

3) Se **a** e **b** são paralelos ou antiparalelos, então **a.b** = ab ou **a.b** = - ab respectivamente.
Dessa propriedade tiramos que: $\hat{x}.\hat{x} = \hat{y}.\hat{y} = \hat{z}.\hat{z} = 1$ e que **a.a** = a^2

4) Se **u** é um vetor unitário, **a.u** é a projeção de **a** na direção de **u**.
Dessa propriedade tiramos que: **a.** $\hat{x} = a_x$, **a.** $\hat{y} = a_y$ e **a.** $\hat{z} = a_z$

5) O produto escalar é comutativo, isto é, **a.b = b.a**

6) O produto escalar é distributivo, isto é **a.(b+c)** = **a.b + a.c**

7) m**(a.b) = (**m**a).b = a.(**m**b),** onde m é um escalar

Exemplo 6: Mostre que o produto escalar de **a** = $a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$ por **b** = $b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z}$ é igual a:

$$\mathbf{a.b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Resolução:
Este resultado é importantíssimo e demonstrável a partir das propriedades do produto escalar.
Usando as propriedades (6) e (7), temos:

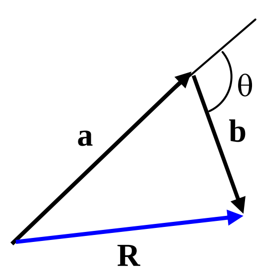
$$\mathbf{a.b} = (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z})\mathbf{.}(b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z}) =$$
$$= a_x b_x\,\hat{x}.\hat{x} + a_x b_y\,\hat{x}.\hat{y} + a_x b_z\,\hat{x}.\hat{z} + a_y b_x\,\hat{y}.\hat{x} + a_y b_y\,\hat{y}.\hat{y} + a_y b_z\,\hat{y}.\hat{z} + a_z b_x\,\hat{z}.\hat{x} + a_z b_y\,\hat{z}.\hat{y} + a_z b_z\,\hat{z}.\hat{z}$$

Usando as propriedades (2) e (3), temos:

$$\mathbf{a.b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Exemplo 7: Se **R** é a soma de **a** e **b**, mostre que : $R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$
Resolução **:**

$$\mathbf{R = a + b}$$



Multiplicando por **a + b** à direita e **R** à esquerda, temos:

R^2 = (**a**+**b**)(**a**+**b**) = a.a+a.b+b.a+b.b

Usando as propriedades (3) e (5) do produto escalar, temos:
$R^2 = a^2+b^2+2\mathbf{a.b}$
Mas $\mathbf{a.b}$ = abcosθ , logo:

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

Observe na figura quem é o ângulo θ. No caso, ele é maior do que 90^o e portanto, cos θ é negativo.

Produto vetorial
O produto vetorial entre o vetor **a** e **b ,** representado por **a**x**b,** é um vetor cujo módulo é dado por:

$$|\mathbf{a}\text{x}\mathbf{b}| = ab\,\text{sen}\theta$$

A direção de **a**x**b** é perpendicular ao plano e seu sentido é dado pela regra dos três dedos da mão direita, sendo. o indicador apontando na direção e sentido de **a**, o dedo médio apontando no sentido de **b** e o polegar apontando no sentido de **a**x**b**, conforme mostra a figura 9.

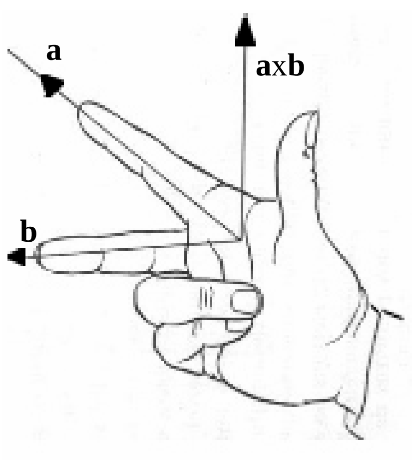
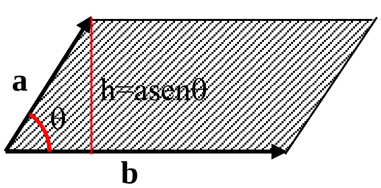


Figura.9: Regra da mão direita para produto vetorial

Da definição do produto vetorial, podemos deduzir algumas importantes propriedades:
1) **axb≠ bxa**
2) Se **a** e **b** têm a mesma direção, isto é, se θ = 0 ou 180^o, então **a**x**b** = 0
3) **a**x(**b+c**) = **a**x**b**+**b**x**c**
4) m(**a**x**b**) = (m**a**)x**b** = **a**x (m**b**)
5) $\hat{x}\text{x}\hat{y} = \hat{z}$; $\hat{y}\text{x}\hat{z} = \hat{x}$; $\hat{z}\text{x}\hat{x} = \hat{y}$; $\hat{x}\text{x}\hat{x} = \hat{y}\text{x}\hat{y} = \hat{z}\text{x}\hat{z} = 0$

Exemplo 8: Mostre que |**a**x**b**| é a área do paralelogramo de lados a e b.
Resolução:



A área do paralelogramo da figura ao lado é bh,onde h é sua altura. Da figura, vemos que $h = a\,sen\theta$. Por outro lado, |**a**x**b**| = absenθ = basenθ = bh.

Podemos ainda escrever o produto vetorial numa forma muito prática, conforme se segue:

$$\mathbf{a}\mathrm{x}\mathbf{b} = (a_x\hat{x}+a_y\hat{y}+a_z\hat{z})\mathrm{x}(b_x\hat{x}+b_y\hat{y}+b_z\hat{z}) =$$

$$= a_xb_x\hat{x}\,\mathrm{x}\,\hat{x}+a_xb_y\hat{x}\,\mathrm{x}\,\hat{y}+a_xb_z\hat{x}\,\mathrm{x}\,\hat{z}+a_yb_x\hat{y}\,\mathrm{x}\,\hat{x}+a_yb_y\hat{y}\,\mathrm{x}\,\hat{y}+a_yb_z\hat{y}\,\mathrm{x}\,\hat{z}+a_zb_x\hat{z}\,\mathrm{x}\,\hat{x}+a_zb_y\hat{z}\,\mathrm{x}\,\hat{y}+a_zb_z\hat{z}\,\mathrm{x}\,\hat{z} =$$

$$=a_xb_y\hat{z}+a_xb_z(-\hat{y})+a_yb_x(-\hat{z})+a_yb_z\hat{x}+a_zb_x\hat{y}+a_zb_y(-\hat{x})=$$

$$=(a_yb_z - a_zb_y)\ \hat{x} - (a_xb_z - a_zb_x)\ \hat{y} + (a_xb_y - a_yb_x)\ \hat{z}$$

A expressão acima é o desenvolvimento do “determinante” a partir dos elementos da primeira linha, ou seja:

$$\mathbf{a}\mathrm{x}\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

onde o “determinante” opera como um verdadeiro determinante.

Produto triplo

Existem dois tipos de produto triplo:

a) Produto triplo escalar, também chamado produto misto, cuja definição é:

M = $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c})$

Exemplo 9: Mostre que o produto misto pode ser calculado através do determinante:

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Do exemplo 8 , temos que: $\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c} = (b_yc_z - b_zc_y)\ \hat{x} - (b_xc_z - b_zc_x)\ \hat{y} + (b_xc_y - b_yc_x)\ \hat{z}$

Do exemplo 9 vem que: $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c}) = a_x(b_yc_z - b_zc_y) - a_y(b_xc_z - b_zc_x) + a_z(b_xc_y - b_yc_x) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

Lembrando que permutações pares de linhas (ou colunas) de um determinante não altera o seu resultado, mostra-se facilmente que : $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c}) = \mathbf{b}.(\mathbf{c}\mathrm{x}\mathbf{a}) = \mathbf{c}.(\mathbf{a}\mathrm{x}\mathbf{b})$

b) Produto triplo vetorial, cuja definição é:

$\mathbf{V} = \mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c})$

Exemplo 10: Mostre que $\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}.\mathbf{b})$

Vimos no exemplo anterior que: $\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c} = (b_yc_z - b_zc_y)\ \hat{x} - (b_xc_z - b_zc_x)\ \hat{y} + (b_xc_y - b_yc_x)\ \hat{z}$

Portanto, temos: $\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ (b_y c_z - b_z c_y) & (b_z c_x - b_x c_z) & (b_x c_y - b_y c_x) \end{vmatrix}$

Como os termos desse determinante são permutações circulares de índices, vamos calcular apenas o termo na direção $\hat{x}$

$[\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c})]_x = \hat{x}\,[a_y(b_x c_y - b_y c_x) + a_z(b_x c_z - b_z c_x)] = \hat{x}\,[b_x a_y c_y + b_x a_z c_z - c_x a_y b_y - c_x a_z b_z]$

Somando e subtraindo $a_x b_x c_x$ a expressão fica:

$[\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c})]_x = \hat{x}\,[b_x a_x c_x + b_x a_y c_y + b_x a_z c_z - c_x a_x b_x - c_x a_y b_y - c_x a_z b_z] =$

$= \hat{x}\,[b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z)] = b_x \hat{x}\,(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - c_x \hat{x}\,(\mathbf{a}.\mathbf{b})$

Calculando as componentes $\hat{y}$ e $\hat{z}$ teríamos: $[\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c})]_y = b_y \hat{y}\,(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - c_y \hat{y}\,(\mathbf{a}.\mathbf{b})$

$[\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c})]_z = b_z \hat{z}\,(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - c_z \hat{z}\,(\mathbf{a}.\mathbf{b})$

Portanto: $\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c}) = (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - (c_x \hat{x} + c_y \hat{y} + c_z \hat{z})(\mathbf{a}.\mathbf{b})$

O que dá: $\mathbf{a}\mathrm{x}(\mathbf{b}\mathrm{x}\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}.\mathbf{b})$

Vetor Posição de um ponto - É o vetor que vai da origem ao ponto considerado. Se tivermos dois P e P' representados pelos vetores **r** e **r'**, o vetor posição de P em relação a P' é **R** = **r** –**r'**.

Figura 10 – O vetor posição de (x,y,z) e o vetor posição de P em relação a P'.

Claro que **R** também representa o deslocamento de um ponto de P' a P.

Analiticamente podemos escrever:

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

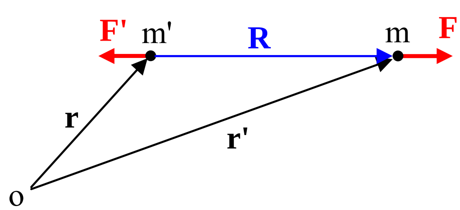
$$\mathbf{r'} = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r'} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$$

R também pode ser escrito como : $\mathbf{R} = R\hat{R}$, onde $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ e $\hat{R}$ é o unitário na direção de **R** e pode ser escrito como: $\hat{R} = \dfrac{\mathbf{R}}{R}$

Exemplo 11 – A distância entre duas massas pontuais *m* e *m'* é R. Determine a força em *m*.
Pela lei da atração gravitacional, o módulo de força entre as duas massas será;

$F = G\dfrac{mm'}{R^2}$, G sendo a constante de gravitação universal. A direção da força é a da reta que une as cargas, e o sentido de repulsão.

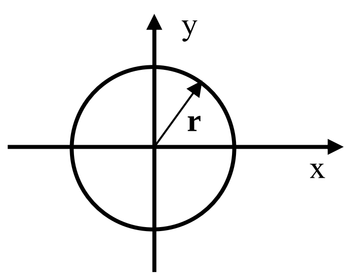


Em *m* a força será: $\mathbf{F} = G\dfrac{mm'}{R^2}\hat{R} = G\dfrac{mm'}{R^2}\dfrac{\mathbf{R}}{R} = G\dfrac{mm'}{R^3}\mathbf{R}$

Em *m'* a força será, evidentemente: **F' = - F**

Variação infinitesimal de r - Se **r** sofre uma variação infinitesimal, então: $d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$

Exemplo 12 - -Mostre que a variação infinitesimal de **r** sobre um círculo é perpendicular a **r.**



$\mathbf{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$

Se o raio do círculo é R, então: $x = R\cos\theta$ e $y = R\,\mathrm{sen}\theta$

onde θ é o ângulo entre **r** e o semi-eixo positivo dos x. Assim, temos:

$dx = -R\mathrm{sen}\theta d\theta$ e $dy = R\cos\theta d\theta$

Podemos escrever: $\mathbf{r} = R\cos\theta\,\hat{x} + R\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{y}$

e $d\mathbf{r} = (-R\mathrm{sen}\theta\,\hat{x} + R\cos\theta\,\hat{y})d\theta$

Obviamente **r**.d**r** = 0, qualquer que seja θ, demonstrando que **r** e d**r** são perpendiculares.

Derivada de funções com mais de uma variável - Seja f(x,y,z) uma função de x,y e z e $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ suas derivadas parciais em relação a x, y e z respectivamente. Assim sendo, $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$ é a variação de f quando x sofre uma variação infinitesimal dx. Idem para as outras variáveis: $df = \frac{\partial f}{\partial y} dy$ e $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$. Se x, y e z sofrem variações infinitesimais, então:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz .$$

Gradiente – Vimos que: $d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$. Observando a expressão para df, podemos escrever:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right).(dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z})$$

O <u>*vetor*</u> $\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$ é chamado *gradiente* de f e é representado por gradf ou ∇f (∇ chama-se nabla).

Podemos então escrever: df = gradf.d**r**

Da definição de gradiente, é elementar demonstrar que:

1) grad(f+g) = grad f + grad g
2) grad(mf) = m grad f , onde m é um escalar
3) grad(fg) = f.grad g + g.grad f

Exemplo 13 – Determine ∇r e $\nabla(1/r)$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad e \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ou seja : $\nabla r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{r}$

Chamando u = (1/r), temos:

$$u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} , \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} , \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

ou seja: $\nabla u. = \nabla(1/r) = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}}{r.r^2} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

Significado do gradiente – Pela definição de produto escalar, podemos também escrever:

$$df = \text{gradf}.\text{dr}.\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre d**r** e gradf. Dessa expressão, vemos que a máxima variação de f se dá quando $\theta = 0$ ($\cos\theta = 1$), ou seja, quando d**r** tem a direção de gradf. Em outras palavras, gradf tem a direção de maior variação de f.

Exemplo 14 – A altura de uma montanha é dada em metros por:

$$h(x,y) = 50(2xy - 3x^2 - 4y^2 – 18x + 28y +12)$$

onde x, y e z são as distâncias em quilômetros de um ponto A.

a) Determine o ponto mais alto da montanha.

b) Qual a altura desse ponto?

c) Qual a inclinação máxima da montanha, em m/km, num ponto situado a 1km ao norte e 1km a leste de A? Em qual direção a inclinação é máxima neste ponto?

a) No ponto mais alto a inclinação é zero, ou seja, em qualquer direção df = 0.

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2y - 6x - 18 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2x - 8y + 28 = 0$$

Dessas duas equações tiramos: $x = -2$ e $y = 3$ $\Rightarrow$ O ponto mais alto fica a 2km a oeste e 3km ao norte de A.

b) Para saber a altura do ponto mais alto, basta substituir os valores encontrados para x e y na expressão da altura: $h(-2,3) = 3600$ m

c) A inclinação máxima é dada pelo gradiente de h.

$\text{gradh} = 50[(2y - 6x - 18)\ \hat{x} + (2x - 8y +28)\ \hat{y}]$

em x = 1km e y = 1km, temos : $\text{gradh} = 50(-22\,\hat{x} + 22\,\hat{y})$

A inclinação será: $|\text{gradh}| = 1{,}56\text{x}10^3$m/km a direção dessa inclinação é $-\hat{x} + \hat{y}$ (a direção de gradh), ou seja, noroeste.

Linhas e superfícies de nível – Linhas de nível são linhas determinadas por: f(x,y) = constante

Superfícies de nível são superfícies determinadas por: f(x,y,z) = constante

Exemplo 15 - Quais são as superfícies de nível da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$?

$x^2 + y^2 + z^2 = C$ (constante) é a equação de uma esfera com centro na origem e raio $\sqrt{C}$. Portanto, as superfícies de nível para $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ são esferas com centro na origem.

Exemplo 16 – Mostre que o gradiente de uma função f(x,y,z) num ponto de uma superfície de nível é normal à superfície.

Como na superfície de nível f(x,y,z) é constante, df =0 qualquer que seja o d**r** contido na superfície.

Mas df = gradf.d**r** que só será identicamente nulo se gradf for normal à qualquer d**r** contido na superfície, ou seja gradf tem que ser normal á própria superfície.

Esse resultado é muito importante. Observe o resultado do **Exemplo 13.** Nos dois casos, as superfícies de nível são esferas de centro na origem (f cte $\Leftrightarrow$ r cte). Nos dois casos o gradiente tem a direção de **r,** como tinha que ser.

Exemplo 17 - Mostre que se uma função f só depende de r, isto é, f = f(r), então o gradf tem a direção de **r**.
De imediato podemos dizer que as superfícies de nível desse tipo de função são esferas centradas na origem, pois, para r constante, f(r) também será e vice-versa. As normais às esferas com centro na origem têm a direção de **r.** As funções desse tipo têm o que se chama de simetria esférica. Podemos ir além e calcularmos o gradiente de funções com simetria esférica.

$$\text{grad } f(r) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{z} = \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{z}\right)$$

Mas (v. exemplo 13): $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{y}{r}$ e $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{z}{r}$

Assim, $\text{grad } f(r) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{1}{r}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$

Portanto, $\text{grad } f(r) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{r}$

Note que o uso dessa expressão simplifica o cálculo do gradiente de funções com simetria esférica. Refaça, por exemplo, o exemplo 13 usando essa expressão para o gradiente.

Fluxo de campo vetorial através de uma superfície – Campos vetoriais são usualmente representados por linhas de força. Linhas de força são linhas que dão a direção, o sentido e, qualitativamente, a intensidade do campo. Para isso, ao longo de uma linha de força o campo é sempre tangente a ela. A intensidade, por seu lado, é representada pela densidade de linhas, isto é, o número de linhas que por unidade de área. A figura 11 mostra alguns exemplos.

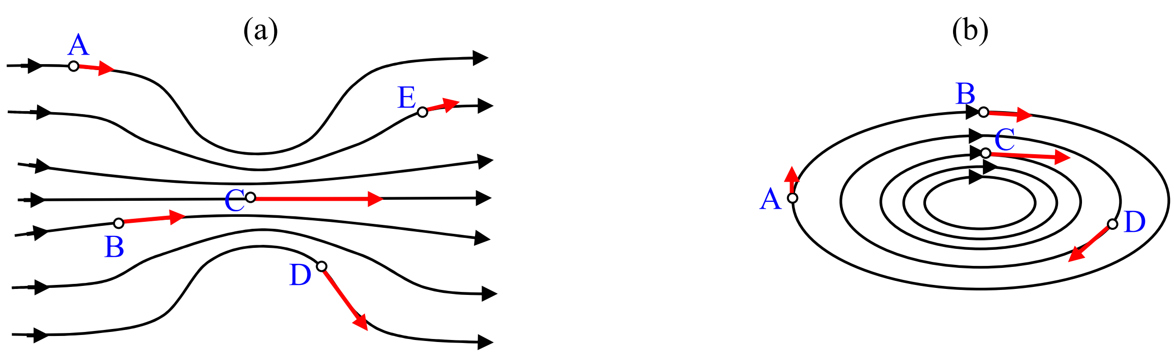


Figura 11 – (a) Linhas de força e os campos nos pontos A, B, C, D e E. Dentre os campos representados, o campo é mais intenso em C ,onde a densidade de linhas é maior. Pela razão inversa, os campos em A e E têm menor intensidade.
(b) Linhas de força e os campos nos pontos A, B, C e D. Dentre os campos representados, o campo é mais intenso em C ,onde a densidade de linhas é maior. Pela razão inversa, o campos em A é o de menor intensidade.

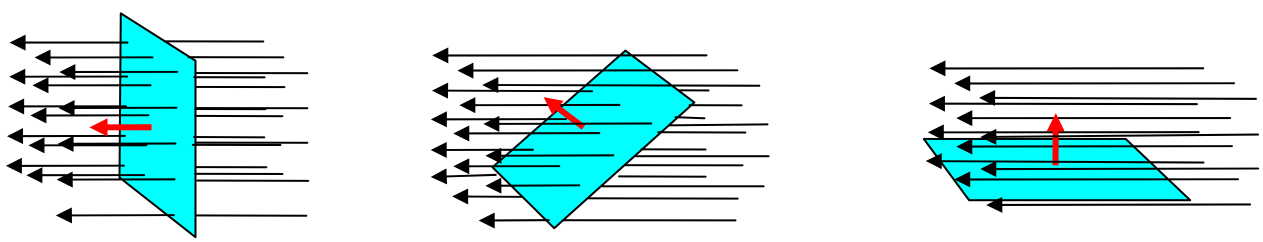
Deve ser ressaltado que o número de linhas usadas para representar um campo vetorial é arbitrário, mas uma vez escolhido esse número (de forma a dar uma idéia clara de como é o campo), é obrigatório seguir as regras já mencionadas.
Por definição, o fluxo de um campo vetorial **F** através de um elemento de área dA é :

$$d\phi = \mathbf{F}.\hat{n}\,dA$$

onde $\hat{n}$ é um unitário normal ao elemento de área. É também usual a notação $d\phi = \mathbf{F}.d\mathbf{A}$ onde $d\mathbf{A} = \hat{n}\,dA$.
As propriedades das linhas de força nos permitem dar uma interpretação mais palpável do conceito de fluxo. Considerando que a intensidade de campo é proporcional à densidade de linhas de força, podemos escrever:

$$d\phi \sim \frac{dN}{dA}\cos\theta\,.dA = dN.\cos\theta\,,$$

onde θ é o ângulo entre o campo (ou linha de força) e a normal a dA. Assim, podemos dizer que o fluxo é proporcional ao número de linhas de forças que <u>atravessam</u> a superfície. O fluxo será *zero* se as linhas de força forem paralelas à superfície, pois, nesse caso, elas não atravessam a superfície. O número de linhas que atravessam uma superfície será máximo quando a superfície for perpendicular às linhas. A figura 12 ilustra o que foi explicado acima.
Figura 12 -



(a) (b) (c)

Figura 12 – No caso (a) a superfície é normal ás linhas de força. A normal (em vermelho) é paralela ao campo e, portanto, θ = 0 (cosθ = 1) e o número de linhas de força que atravessam a superfície é máximo. No caso (b), a normal faz um ângulo θ com a normal. O número de linhas de força que atravessam a superfície diminuiu em relação ao caso (a). No caso (c), a superfície é paralela às linhas de força e, portanto, $\theta = 90^o$ (cosθ = 0). Nenhuma linha de força atravessa a superfície nesse caso e, consequentemente, o fluxo através dela é zero.

Quando se tem uma superfície fechada, convencionalmente orienta-se a normal para fora do volume limitado por ela. Sendo assim, linhas de força que entram na superfície têm fluxo negativo ($\theta > 90^o$) e para as linha que saem da superfície o fluxo é positivo. Não havendo nenhuma fonte nem sumidouro de linhas dentro da superfície fechada, as linha que entram têm que sair e, portanto, o fluxo total através de toda a superfície é *zero*.

Divergência - Numa região onde o campo vetorial é **F**, considere um ponto P(x,y,z) em torno do qual existe uma superfície de área A limitando um volume V. Por definição:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint \mathbf{F}.d\mathbf{A} = \lim_{V\to 0} \frac{\phi_T}{V}$$

Onde ϕ_T é o fluxo total através da superfície A. Portanto, a divergência num ponto significa o fluxo por unidade de volume através de uma superfície infinitesimal em torno do ponto. De imediato podemos tirar duas consequências dessa definição:
1) A divergência é um escalar.
2) Se não há fonte de linhas de força (campo), a divergência é zero.
Vamos procurar uma expressão algébrica para o cálculo da divergência. Para isso consideremos um ponto P de coordenadas (x,y,z) no centro de um paralelepípedo com arestas de comprimentos Δx, Δy e Δz paralelas aos eixos X,Y e Z respectivamente, conforme a figura 13.

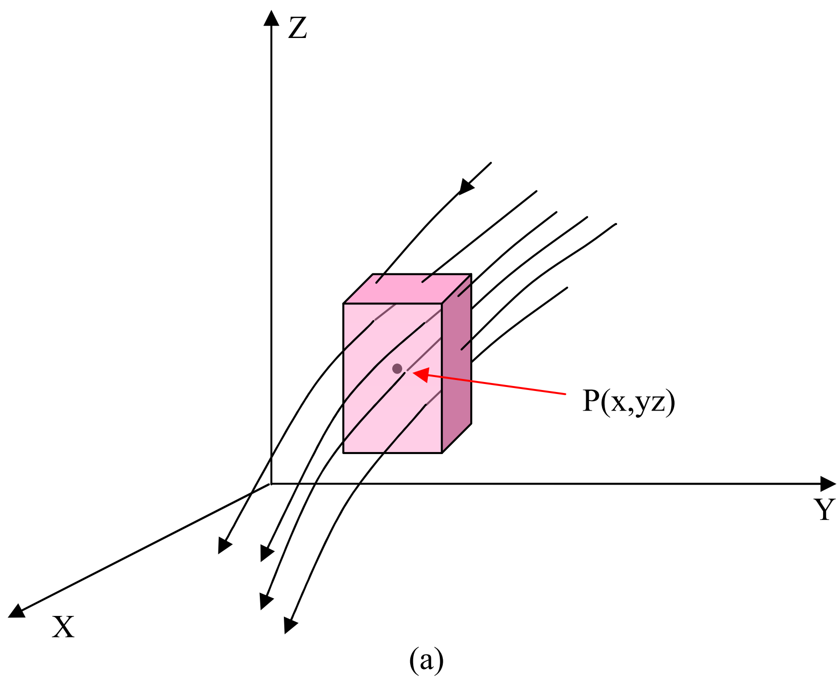


Figura 13 - (a) Um ponto P de coordenadas (x,y,z) no centro de um paralelepípedo e numa região onde existe um campo vetorial representado por suas linhas de força. Note que nem todas as linhas atravessam o paralelepípedo.

Vamos calcular o fluxo total através desse paralelepípedo lembrando que o fluxo é positivo quando as linhas saem do paralelepípedo e negativo quando entram. Lembremos também que o campo **F** pode ser decomposto em F_x, F_y e F_z e que, para pequenos valores de Δu, uma função $f(u+\Delta u) = f(u) + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u$ (basicamente , essa expressão são os dois primeiros termo do desenvolvimento em série de Taylor de f(u)).
Primeiramente, calculemos o fluxo "líquido" pelas faces perpendiculares ao eixo x. A figura 14 é uma ampliação do paralelepípedo mostrado na figura 13 sem as linhas de força para maior clareza.

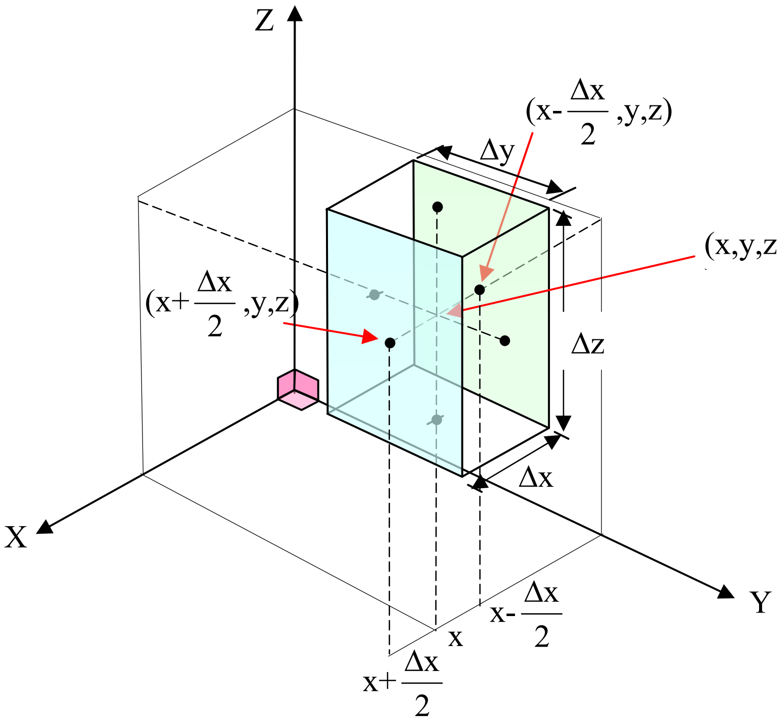


Figura 14 - Na figura, o ponto P, de coordenadas (x,y,z) está no centro do paralelepípedo. Os centro das faces perpendiculares ao eixo X têm coordenadas:

$$(x+\frac{\Delta x}{2},y,z) \;\; e \;\; (x-\frac{\Delta x}{2},y,z)$$

Em (x,y,z) o campo paralelo ao eixo X é $F_x(x,y,z)$. Em $x+\Delta x/2$ e em $x-\Delta x/2$ os campos serão:

$$F(x+\Delta x/2,y,z) = F_x(x,y,z) + \frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \qquad e \qquad F(x-\Delta x/2,y,z) = F_x(x,y,z) - \frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

O fluxo através das faces que contêm os $x+\Delta x/2$ e $x-\Delta x/2$ será o produto da componente F_x do campo no centro da face pela área da face, ou seja $\Delta y\Delta z$. Na verdade isto é uma aproximação devido ao fato das faces serem infinitesimais. devemos levar em conta também que as linhas entram na face em $x-\Delta x/2$ e sae pela face em $x+\Delta x/2$. Portanto temos:

$$\phi_{x+\Delta x/2} = (F_x(x,y,z) + \frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2})\Delta y\Delta z \qquad e \qquad \phi_{x-\Delta x/2} = -\,(F_x(x,y,z) - \frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2})\Delta y\Delta z$$

O fluxo total através das faces perpendiculares ao eixo X será: $\phi_{Tx} = \phi_{x+\Delta x/2} + \phi_{x-\Delta x/2}$, ou seja:

$$\phi_{Tx} = \frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

Por analogia, podemos afirmar que: $\phi_{Ty} = \frac{\partial Fy(x,y,z)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$ e $\phi_{Tz} = \frac{\partial Fz(x,y,z)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$

e : $\phi_T = \left(\frac{\partial F_X(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_Y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_Z(x,y,z)}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z$

Pela definição, a divergência será:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\phi_T}{V} = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\left(\frac{\partial F_X(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Fy(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial Fz(x,y,z)}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Finalmente: $\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_X(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Fy(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial Fz(x,y,z)}{\partial z}$

De fato, como esperado a divergência é uma grandeza escalar.
De uma forma simplificada, escreveremos apenas F_x ao invés de $F_x(x,y,z)$. O mesmo para as outras componentes.
Usando as propriedades do produto escalar, vemos que a divergência pode ser escrita:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right).(F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z})$$

Vamos então definir o operador *nabla* como: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

Com essa definição, temos:
grad f = ∇ f   O gradiente transforma escalar em vetor.
div **F** = ∇.**F**   A divergência transforma vetor em escalar
div.grad f = $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Esta última expressão (div.grad) é chamada *Laplaciano* de f e é uma função escalar.
É elementar demonstrar que:
1) div(**F**+**G**) = div**F** + div **G**
2) div (m**F**) = m div**F,** m sendo um escalar.
3) div **r** = 3

Exemplo 18 – Calcule div($\mathbf{r}/r^3$).
$\mathbf{r}/r^3 = (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$
$\text{div}(\mathbf{r}/r^3) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.[(y^2+z^2-2x^2)+(x^2+z^2-2y^2)+(x^2+y^2-2z^2)] = 0$ exceto em (0,0,0)

Exemplo 19 – Mostre que div(**u**f) = **u**.gradf   onde **u** é um vetor constante e f uma função.
$\text{div}(\mathbf{u}f) = u_x\frac{\partial f}{\partial x} + u_y\frac{\partial f}{\partial y} + u_z\frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{u}.\text{grad}f$

Rotacional – Seja **F** um campo vetorial e C uma linha fechada limitando uma superfície A que contém um ponto P. Define-se rotacional de **F** em P como:

$$\hat{n}\,.\mathrm{rot}\mathbf{F} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{1}{\Delta A} \oint \mathbf{F}.d\ell$$

onde $d\ell$ é um elemento infinitesimal de deslocamento orientado sobre a linha C e $\hat{n}$ é o unitário normal à A e orientado de acordo com a regra da mão direita, conforme mostra a figura 15. Pela própria definição, vemos que o rotacional é uma grandeza vetorial que dá a densidade de circulação, que é como é chamada a integral acima, em torno do ponto.

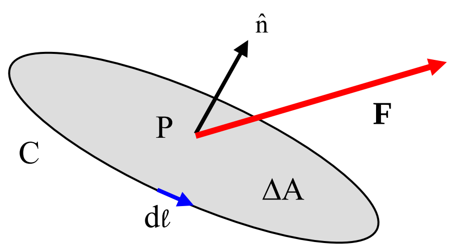


Figura 15 - A linha orientada C que limita a área ΔA. A direção e o sentido de $\hat{n}$ é dado pela regra da mão direita. Se o deslocamento $d\ell$ sobre da linha C fosse oposto, a normal também teria sentido teria o sentido oposto.

Para encontrarmos uma expressão para rot**F,** utilizaremos o mesmo procedimento que foi usado na divergência, só que agora utilizaremos uma linha retangular fechada e paralela ao plano xy, conforme mostra a figura 16. O sentido da integração será foi escolhido para que a normal seja $\hat{z}$. Portanto estaremos calculando a componente z do rotacional.

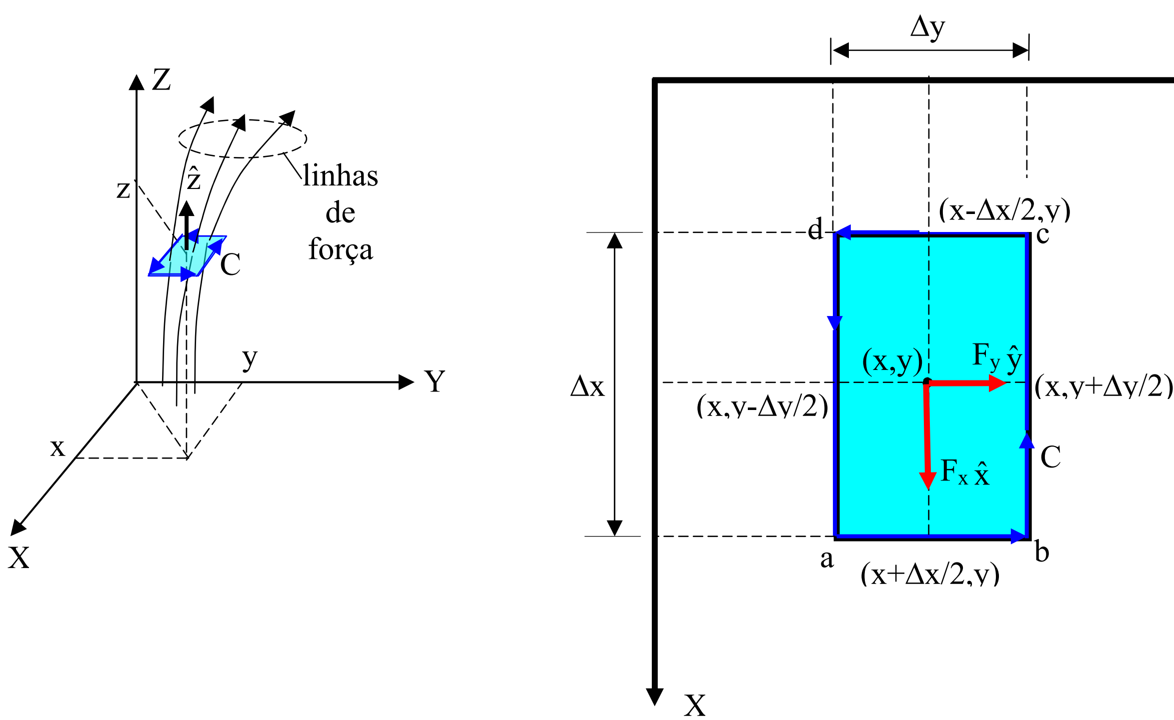


Figura 16 – (a) Para determinar e expressão da componente z do rotacional em (x,y), utilizamos um retângulo fechado que contem o ponto x(x,y).(b) Para maior clareza, o retângulo foi ampliado.

Vamos considerar o que em cada lado a componente de F paralela a ele seja constante e igual ao valor no seu ponto médio. Assim, a integral pode ser substituída pelo produto de F pelo tamanho do lado (Δx ou Δy). Claro que F_z não entra nesse cálculo, pois esta componente é perpendicular á linha. Então temos:

lado ab: $C_1 = F_y(x+\Delta x/2,y)\Delta y = (F_y(x,y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_y}{\partial x})\Delta y$

lado bc: $C_2 = - F_x(x,y+\Delta y/2))\Delta x = - (F_x(x,y) + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta x$

lado cd: $C_3 = - F_y(x-\Delta x/2,y)\Delta y = - (F_y(x,y) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_y}{\partial x})\Delta y$

lado da: $C_4 = F_x(x,y-\Delta y/2))\Delta x = (F_x(x,y) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta x$

A circulação em abcda será então:

$$C = (F_y(x,y)+ \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_y}{\partial x})\Delta y - (F_x(x,y)+ \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta x - (F_y(x,y)- \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_y}{\partial x})\Delta y + (F_x(x,y)- \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta x$$

$$C = (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta x\Delta y = (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta A$$

Assim: $\hat{z}.\text{rot}\,\mathbf{F} = (\text{rot}\,\mathbf{F})_z = \lim\limits_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint_C \mathbf{F}.d\ell = (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$

Observe que a soma entre parêntesis envolve derivadas cruzadas (F_y em relação a x e F_x em relação a y).
Seguindo o mesmo procedimento para as outras componentes encontraríamos:

$(\text{rot}\,\mathbf{F})_x = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})$

$(\text{rot}\,\mathbf{F})_y = (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x})$

Essas expressões nos permitem escrever:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

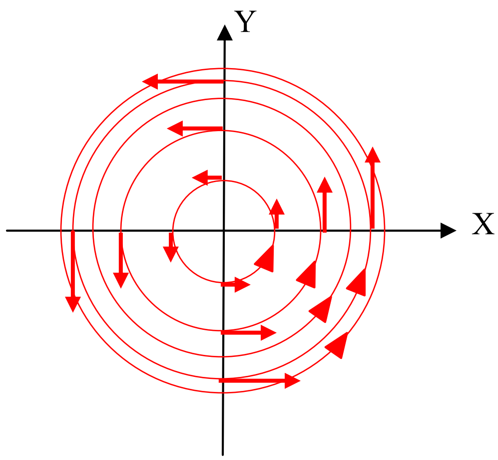
ou: $\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla x\mathbf{F}$

Exemplo 20 - Calcule o rotacional de **r.**

$$\text{rot}\ \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 21 – Considere um campo vetorial dado por $\mathbf{v} = -y\,\hat{x} + x\,\hat{y}$. Desenhe algumas linhas de força e calcule rot **v** em (0,0,0).

Desenhando os vetores campo em y = 0, e x = ±1, ±2, ±3 e em x = 0 e y = ±1, ±2, ±3, podemos traçar as linhas de força. Já podemos ver que o rotacional não será nulo.



$$\text{rot}\ \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\,\hat{z}$$

Algumas relações importantíssimas – Algumas relações usando o operador nabla têm grande utilidade em eletromagnetismo. As três relações a seguir são das mais úteis e o aluno deve demonstrá-las pelo, menos uma vez na vida (talvez numa prova!).

1) $\nabla \mathrm{x} \nabla f = 0$ onde f é uma função escalar. Esta relação diz que se uma função (campo) vetorial puder ser escrita como um gradiente de uma função escalar, então seu rotacional é nulo. Dizemos que é uma função *irrotacional*. Reciprocamente, se uma função (campo) vetorial for irrotacional, ela pode ser escrita como gradiente de uma função escalar.

2) $\nabla \mathbf{.} \nabla \mathrm{x} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ onde **F** é uma função vetorial. Esta relação diz que se uma função (campo) vetorial puder ser escrita como um rotacional e de uma função vetorial, então sua divergência é nula. Dizemos que é uma função *solenoidal*. Reciprocamente, se uma função (campo) vetorial for solenoidal, ela pode ser escrita como gradiente de uma função escalar.

3) $\nabla \mathrm{x}(\nabla \mathrm{x} \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \mathbf{.F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

Nesta última relação o conceito de laplaciano foi estendido para vetores. Assim, $\nabla^2 \mathbf{F}$ é um vetor cujas componentes são os laplacianos das respectivas componentes de **F**.

Teorema da divergência - O teorema da divergência relaciona fluxo e divergência num volume.

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}\, dv = \oint_A \mathbf{F}.\hat{n} dA$$

Onde A é a área da superfície que delimita o volume V
A demonstração deste teorema não é difícil e pode ser feita pelo aluno. A idéia é que quando se divide um volume em dois, o fluxo no volume primitivo é igual à soma dos fluxos nos dois volumes. Isso ocorre porque ao dividir o sólido com uma parede, se para uma das partes o fluxo é positivo (linhas saindo através dessa parede) para a outra é necessariamente positivo (as linhas que saem de uma parte estarão necessariamente entrando na outra). Quando se soma os fluxos, na parede divisória eles se anulam e, portanto, o fluxo total é o fluxo através do sólido antes da divisão. Isto vale também quando o sólido é dividido em N sólidos infinitesimais.

Exemplo 22 – Mostre que $\oint_A f\, \hat{n} dA = \int_V \nabla f\, dV$

Multiplicando por um vetor constante **u** o lado esquerdo da equação, temos:

$\oint_A (\mathbf{u}f).\hat{n}\, dA = \int_V \nabla.(f\mathbf{u})\, dV$ pelo teorema da divergência

No exemplo 19, mostramos que : $\nabla.(\mathbf{u}f) = \mathbf{u}.\nabla f$, logo a igualdade acima fica:

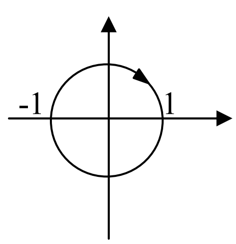
$$\oint_A (\mathbf{u}f).\hat{n}\, dA = \int_V \mathbf{u}.\nabla f\, dV \quad \Rightarrow \quad \oint_A f\, \hat{n}\, dA = \int_V \nabla f\, dV$$

Teorema de Stokes – O teorema de Stokes relaciona o fluxo do rotacional de uma função vetorial **F** através de uma superfície e a circulação de **F** sobre a linha que delimita essa superfície

$$\int_A \mathrm{rot}\mathbf{F}.\hat{n} dA = \oint_C \mathbf{F}.d\ell$$

A demonstração deste teorema segue o mesmo raciocínio que o usado na demonstração do teorema da divergência. Evidentemente que onde era superfície lá, será linha aqui. O (bom) aluno deve tentar fazer essa demonstração.

Exemplo 23 - Calcule o trabalho de uma força $\mathbf{F} = -y\,\hat{x} + x\,\hat{y}$ (x e y em metros e **F** em Newtons) para deslocar, no sentido horário, uma massa numa trajetória circular de equação $x^2 + y^2 = 1$.



Vamos resolver esse problema por integração direta e com o uso do teorema de Stokes.
a) Por integração direta:
O trabalho da força F sobre o círculo é dado por: $W = \oint \mathbf{F}.d\ell$

onde $d\ell = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy$

Então: F.dl = -ydx + xdy (1)
Da equação do círculo: xdx + ydy = 0 (2)
e $y = \sqrt{1-x^2}$ (3)
Substituindo y
de (2) e (3) ,vem: $dy = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (4)

Substituindo (3) e (4) em (1): $F.dl = (-\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}})dx = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Assim ; $W = \oint \mathbf{F}.d\ell = 4.\int_0^1 \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = -4.\ [\text{arcsenx}]_0^1 = -2\pi$

b) Com o uso do teorema de Stokes:

Pelo teorema de Stokes: $W = \oint \mathbf{F}.d\ell = \int \text{rot}\mathbf{F}.\hat{n}dA$

A normal ao plano do círculo, levando em conta a regra da mão direita, é: $\hat{n} \equiv -\hat{z}$

O rotacional de **F** foi calculado no exemplo 21. rot**F** = $2\,\hat{z}$

Então: $\int \text{rot}\mathbf{F}.\hat{n}dA = \int 2\hat{z}.(-\hat{z})dA = -2\int dA = -2\pi$
Escolha então qual a maneira mais simples quando encontrar um desses problemas