F 315 B Mecânica Geral I

Prof. Antonio Vidiella Barranco

Departamento de Eletrônica Quântica (Prédio A-6) S218
Fone: (19) 3521-5442
vidiella@ifi.unicamp.br ou vidiella@unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella

Google Classroom: opwan6e

Videoaulas no canal “Antonio Vidiella” do YouTube

Atendimentos de monitoria:
Ver Programa da Disciplina no Material do Google Classroom

Método da energia

Podemos escrever, em uma dimensão, por exemplo

$$\frac{mv_x^2}{2} + U(x) = E \quad \Rightarrow \quad v_x = \pm\sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}$$

Para a posição teremos:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Importante manter o sinal até considerar as condições iniciais

Exemplo: Sistema massa-mola (oscilador harmônico simples)

Força elástica: $F(x) = -kx$

0

Neste caso $$U(x) - U(0) = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

zero do potencial → escolha

$$\boxed{U(x) = \frac{kx^2}{2}}$$

Energia potencial elástica

Solução: oscilador harmônico

Utilizando a equação da energia

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{1-kx^2/2E}}=t \qquad (t_0 = 0)$$

Substituição:

$$\mathrm{sen}\,\alpha = x\sqrt{\frac{k}{2E}}$$

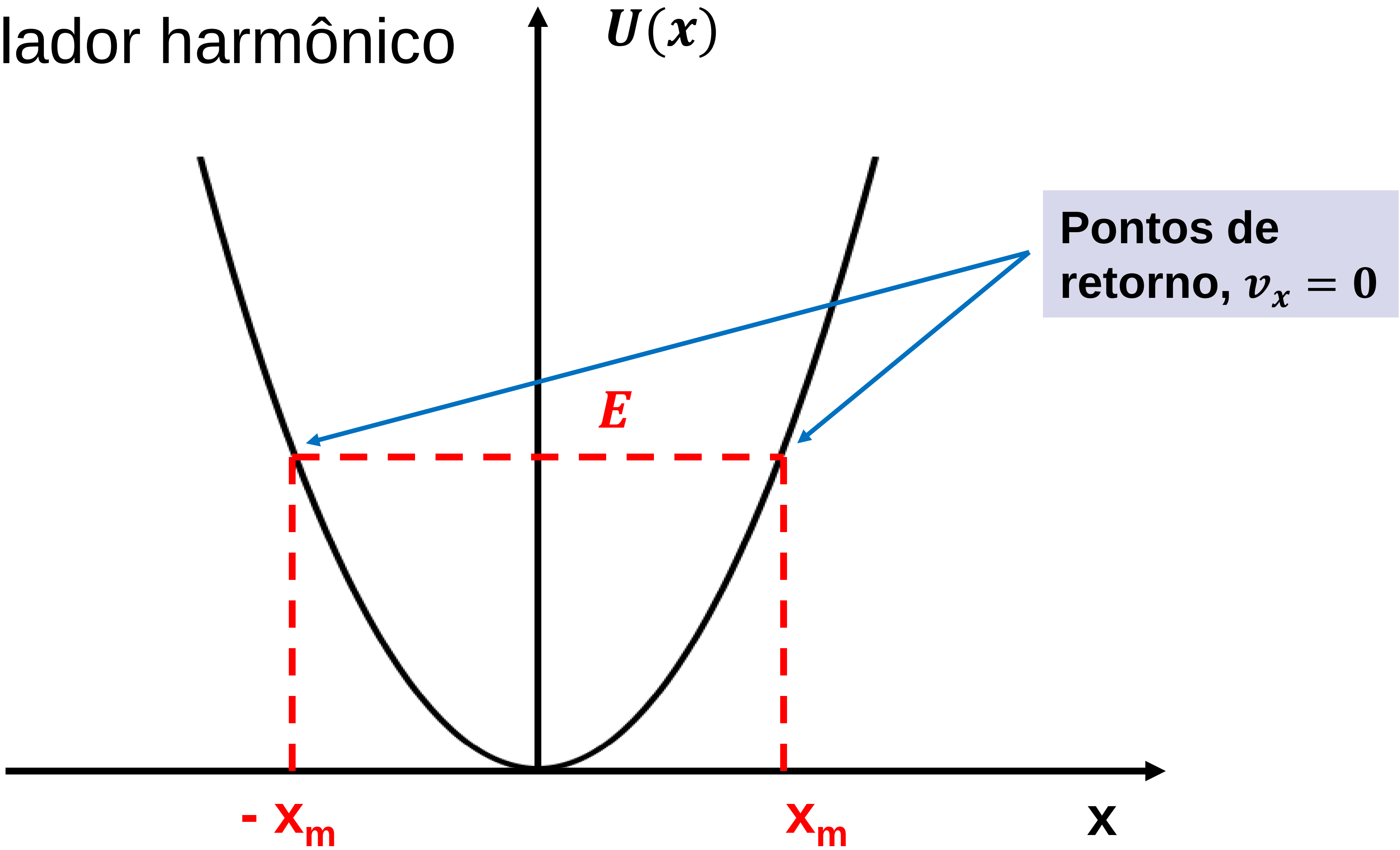
Solução geral é da forma

$$\boxed{x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\mathrm{sen}\left(\omega_0 t+\varphi\right)}$$

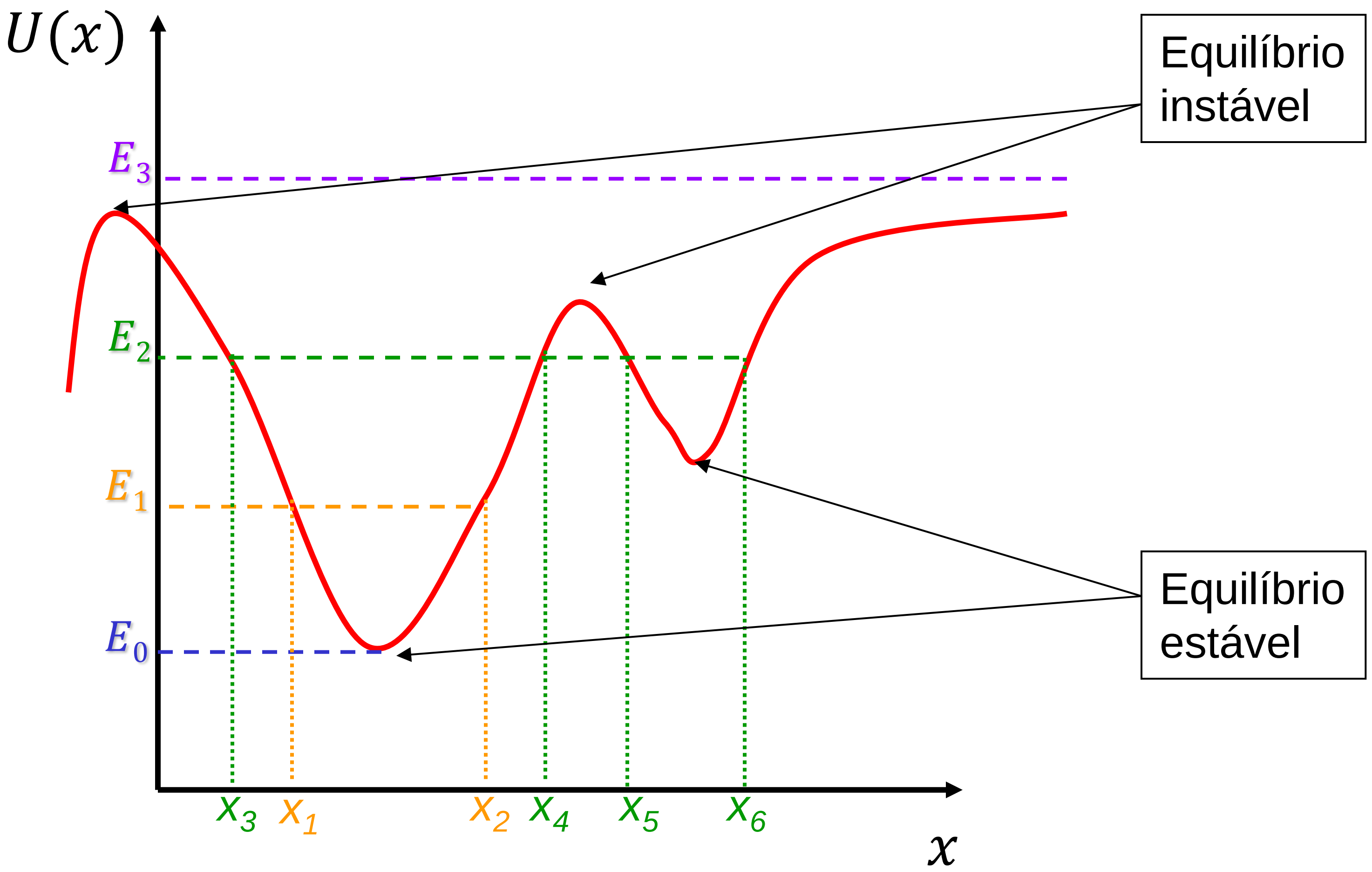
com $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Análise do movimento em 1D: Energia potencial $U(x)$

Oscilador harmônico



Potencial $U(x)$: análise qualitativa



Considerações gerais

Expandindo $U(x)$ em torno de um ponto de equilíbrio estável x_0

$$U(x) = U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

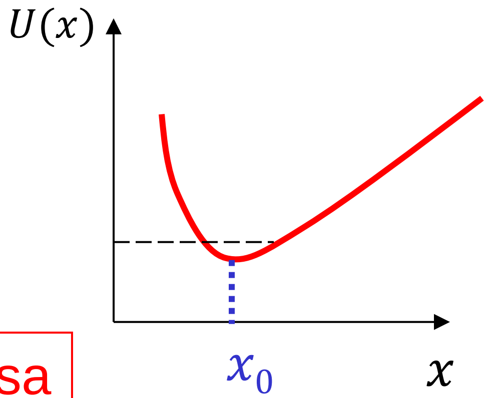
Tomando $U(x_0) = 0$

E sendo x_0 um ponto de equilíbrio, $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$

Considerações gerais

Assim, próximo a x_0 $$U(x) \approx \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2$$

Identificando $$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} \equiv k$$



Obtemos $$\boxed{U(x) \approx \frac{1}{2} k (x - x_0)^2}$$ ⇒ massa mola

Conclusão

Nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável de um potencial $U(x)$ qualquer, o movimento de uma partícula será, com boa aproximação, um movimento harmônico simples.

Potencial $U(x)$: análise qualitativa

Procedimento:

1) Fazer o gráfico de $U(x) \times x$, identificando os pontos de equilíbrio.
2) Analisar o movimento para diferentes condições iniciais: i) energia mecânica E + sinal da velocidade inicial $\rightarrow$ equivalente à velocidade inicial; ii) posição inicial. Verificar em que situações o movimento terá um, dois, ou nenhum ponto de retorno, por exemplo.

Obs: notar que devemos sempre ter $E - U(x) \geq 0$

Problema

Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força

$$F(x) = -kx + \frac{kx^3}{a^2}$$

onde k e a são constantes positivas.

a) Determine $U(x)$ e discuta os possíveis tipos de movimento.

b) Calcule a frequência de pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável.

c) Mostre que se $E = ka^2/4$, podemos calcular $x(t)$ por métodos elementares. Escolha convenientemente as condições iniciais e compare o resultado para $x(t)$ com a discussão qualitativa do item a.