F 315 B   Mecânica Geral I

Prof. Antonio Vidiella Barranco

Departamento de Eletrônica Quântica (Prédio A-6) S218
Fone: (19) 3521-5442
vidiella@ifi.unicamp.br ou vidiella@unicamp.br
http://www.ifi.unicamp.br/~vidiella

Google Classroom: opwan6e

Videoaulas no canal "Antonio Vidiella" do YouTube

Atendimentos de monitoria:
Ver Programa da Disciplina no Material do Google Classroom

Oscilador harmônico simples

Solução geral do oscilador harmônico simples

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \theta)}$$

Ainda, em termos de $x(0)$ e $v_x(0)$,

$$\boxed{x(t) = x(0)\cos\omega_0 t + \frac{v_x(0)}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t}$$

Oscilador harmônico amortecido

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$p=-\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma=\frac{b}{2m}$$

Freqüência natural

Coeficiente de amortecimento

Oscilador harmônico amortecido

1) Caso sub-amortecido: $\omega_0 > \gamma$

Solução geral:

$$\boxed{x(t) = x_m e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_1 t + \theta\right)}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2}$$

Oscilador harmônico amortecido

2) Caso super-amortecido: $\omega_0 < \gamma$

Solução geral:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}}$$

$$\gamma_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2}$$

$$\gamma_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2}$$

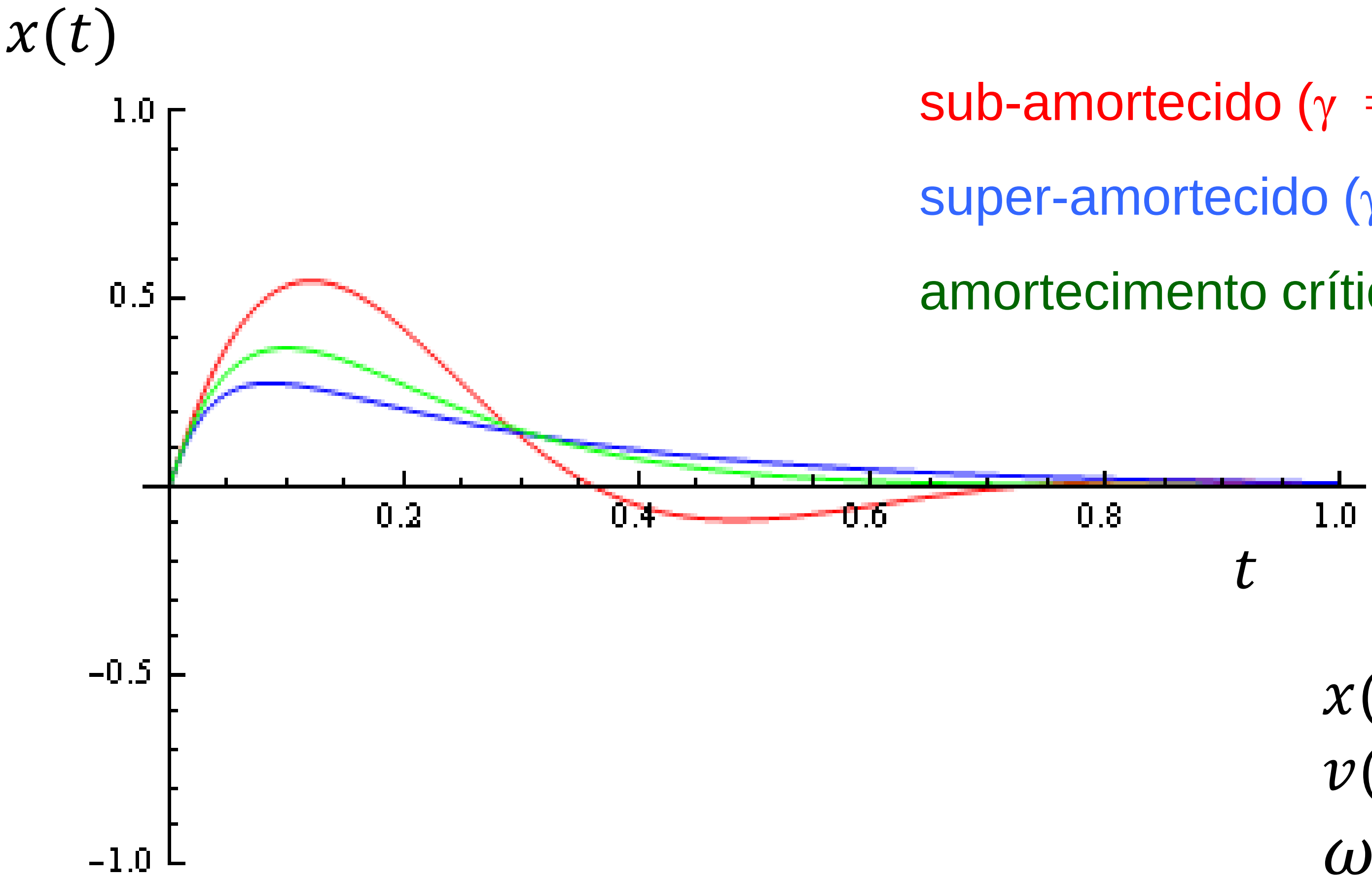
Oscilador harmônico amortecido

3) Amortecimento crítico: $\omega_0 = \gamma$

Solução geral:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}}$$

Oscilador harmônico amortecido



sub-amortecido (γ = 5 rad/s)

super-amortecido (γ = 15 rad/s)

amortecimento crítico (γ = 10 rad/s)

$x(0) = 0$

$v(0) = 10$ m/s

$\omega_0 = 10$ rad/s

Problemas

1) Considere um oscilador harmônico com amortecimento crítico (frequência natural de oscilação ω_0) com a posição inicial do bloco $x_0 > 0$ e sua velocidade inicial de módulo $|v(0)| = v_0$ no sentido do ponto de equilíbrio. a) Calcular $x(t)$; b) Encontrar a condição sobre a velocidade inicial do bloco de modo que este ultrapasse a posição de equilíbrio.

2) Calcule a dependência temporal da energia total de um oscilador harmônico sub-amortecido no limite de amortecimento muito fraco ($\gamma \ll \omega_0$). Calcule a fração f de energia perdida por ciclo neste caso.
O fator de qualidade do oscilador é definido como $Q = 2\pi/f$.

Oscilador harmônico

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_x x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k_y y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k_z z$$

Oscilações independentes

Para o <u>oscilador isotrópico</u>

$$k_x = k_y = k_z = k$$

Oscilador harmônico

Em geral

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x)$$
$$y = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y)$$
$$z = A_z \cos(\omega_z t + \theta_z)$$

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m}$$

Oscilador harmônico em 2D

Vejamos o caso em 2D isotrópico

$$x = A_x \cos(\omega_0 t + \theta_x)$$
$$y = A_y \cos(\omega_0 t + \theta_y)$$

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{k}{m}$$

$$A_x^{\ 2} y^2 + A_y^{\ 2} x^2 - 2xyA_x A_y \cos\delta = A_x^{\ 2} A_y^{\ 2} \operatorname{sen}^2\delta$$

$$\delta = \theta_y - \theta_x$$

Oscilador harmônico em 2D

Para $\delta = \frac{\pi}{2}$ rad

$$\boxed{\frac{x^2}{A_x^{\,2}} + \frac{y^2}{A_y^{\,2}} = 1}$$

$\Rightarrow$ elipse

Para $\delta = 0$

$$\boxed{y = \frac{A_y}{A_x} x}$$

$\Rightarrow$ reta

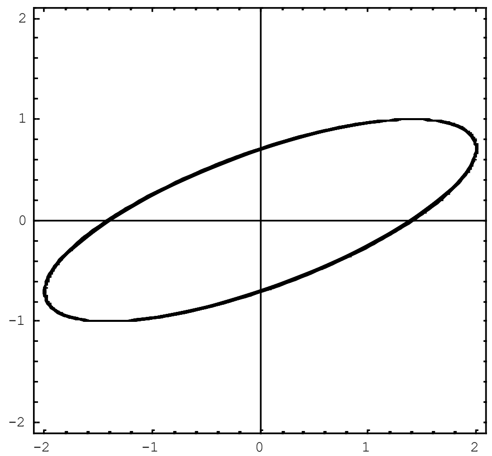
Oscilador harmônico em 2D

Para o caso anisotrópico $\boxed{\omega_x \neq \omega_y}$

Se $\boxed{\dfrac{\omega_y}{\omega_x} = \dfrac{n_y}{n_x}}$ for satisfeita para n_y e n_x inteiros, a massa m percorrerá trajetórias fechadas (movimento periódico) → figuras de Lissajous

Caso contrário (freqüências incomensuráveis), o movimento não será periódico e as curvas das trajetórias não fecharão (veja a figura 6 a seguir, para $\omega_x = 1\,\mathrm{rad}$ e $\omega_y = \pi\,\mathrm{rad}$.

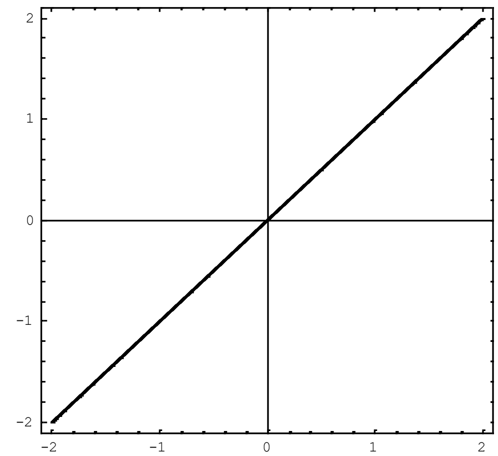
Oscilador harmônico em 2D



$A_x = 2 \quad A_y = 1$

$\omega_x = 2 \quad \omega_y = 2$

$\delta = \pi / 4 \text{ rad}$

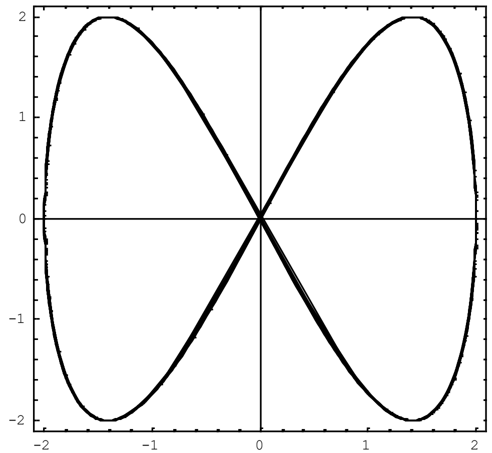


$A_x = 2 \quad A_y = 2$

$\omega_x = 2 \quad \omega_y = 2$

$\delta = 0$

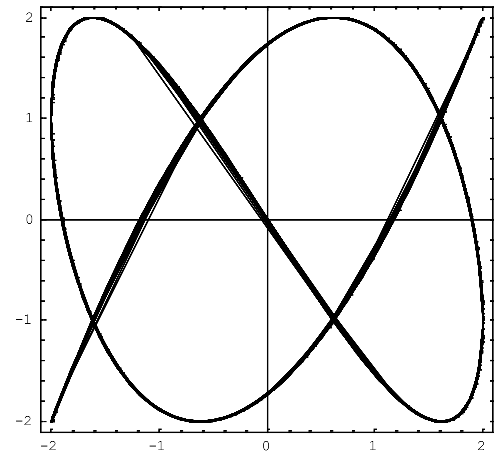
Lissajous



$A_x = 2 \quad A_y = 2$

$\omega_x = 1 \quad \omega_y = 2$

$\delta = \pi / 2 \text{ rad}$

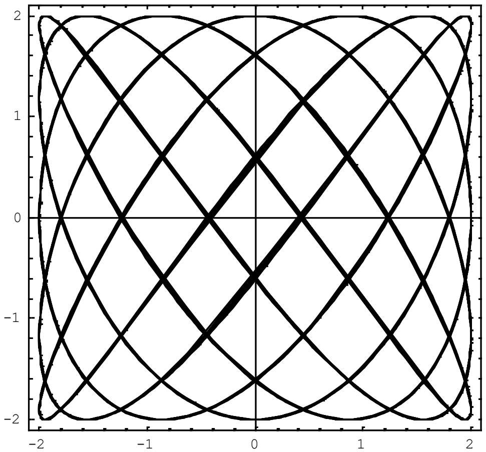


$A_x = 2 \quad A_y = 2$

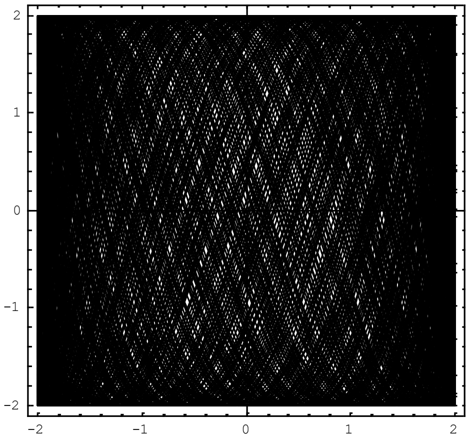
$\omega_x = 3 \quad \omega_y = 5$

$\delta = 0$

Oscilador harmônico em 2D



$$A_x = 2 \quad A_y = 2$$
$$\omega_x = 2{,}5 \quad \omega_y = 3{,}5$$
$$\delta = \pi / 2 \text{ rad}$$



$$A_x = 2 \quad A_y = 2$$
$$\omega_x = 1 \quad \omega_y = \pi$$
$$\delta = \pi / 2 \text{ rad}$$