# INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN” - UNICAMP
# F-315 A DIURNO
# EXAME FINAL - 10/12/2024

**Nome:**________________________________________**RA**_____________

**Assinatura:**________________________________________

## ATENÇÃO

1. **É terminantemente proibido o uso de outras folhas de papel que não sejam as desta prova; as folhas não podem ser destacadas em hipótese alguma.**
2. **Cada questão deverá ser respondida na folha correspondente.**
3. **Não é permitido o uso de <u>celulares</u>. Em cima da mesa apenas: lápis, borracha caneta, régua e documento com foto. O restante do material deverá ser colocado embaixo do assento. <u>Os celulares devem ser desligados</u>**
4. **A duração da prova é de 1h e 50 min.**
5. **Resolva um total de três questões: as questões 1 e 2, e <u>escolha apenas uma questão</u> entre as questões 3 e 4.**
6. **A questão 4 deve ser resolvida utilizando o formalismo de Lagrange e/ou Hamilton.**
7. **<u>Justificar todas as respostas</u>.**

## TABELA DE INTEGRAIS

1. $\int xe^{-ax}dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax+1)$
2. $\int e^{ax}sen(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\,sen(bx) - b\cos(bx))$
3. $\int e^{ax}cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\,cos(bx) + b\,sen(bx))$
4. $\int cos^2(bx)\,dx = \frac{cos(bx)sen\,(bx)}{2b} + \frac{1}{2}x$
5. $\int sen^2(bx)\,dx = -\frac{cos(bx)sen\,(bx)}{2b} + \frac{1}{2}x$
6. $\int xcos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}cos(ax) + \frac{1}{a}x\,sen(ax)$
7. $\int sen(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\,cos(ax)$
8. $\int cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\,sen(ax)$
9. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad n \neq -1$
10. $\int \frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)$
11. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$
13. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b}$
14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+b^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}$
15. $\int \frac{dx}{(ax+b)} = \frac{1}{a}ln|ax+b|$

1) **(3,5 pontos)** Um foguete de massa $M$ parte do repouso da superfície de um planeta $(y = 0)$ com aceleração da gravidade $\vec{g} = -g\hat{y}$ constante. Os motores do foguete proporcionam uma força constante $F_0$ já a partir do momento do lançamento $(t = 0)$. A atmosfera do planeta exerce uma força de resistência proporcional à velocidade do foguete, da forma $\vec{F} = -b\vec{v}$, sendo $b$ uma constante positiva.
   a) Calcule a velocidade de ascensão do foguete como função do tempo.
   b) Após um tempo suficientemente longo, quando o foguete atingir sua velocidade máxima, o combustível acaba abruptamente. Calcule a velocidade do foguete como função do tempo a partir do instante do término do combustível.
   c) Calcule o trabalho da força resultante sobre o foguete desde o início do movimento até o instante do término do combustível.

   Obs: desprezar a variação da massa do foguete devido à queima do combustível e considerar a aceleração da gravidade constante durante todo o movimento.

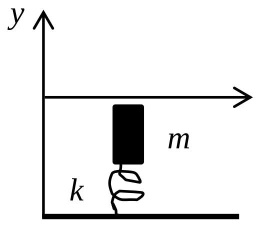
2) **(3,5 pontos)** Um pistão oscilante, de massa $m$, está acoplado a uma mola de constante $k = ma^2/4$, submetido a uma força de resistência viscosa da forma $\vec{F}_r = -b\vec{v}$, com $b = ma$, sendo $a$ uma constante positiva. O conjunto está na vertical também sob a ação de uma força externa dependente do tempo, $F(t) = F_0 e^{-at}$, assim como da força da gravidade constante (aceleração $g$), conforme a figura abaixo.

a) Encontre o regime de amortecimento do oscilador, assim como $x_h(t)$, a solução da equação homogênea, e $x_p(t)$, a solução paticular da equação não-homogênea.

b) Calcule a posição do pistão como função do tempo, $y(t)$, considerando as condições iniciais $y(0) = -mg/k$ (com o pistão repousando inicialmente sobre a mola em equilíbrio com a força de gravidade) e $v_y(0) = 0$.

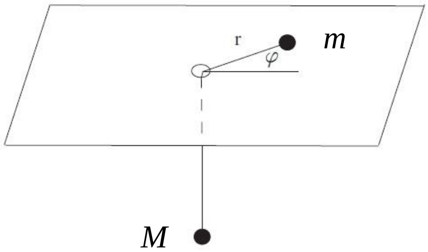
c) Calcule, a partir da solução encontrada, a posição do pistão para $t \gg 1/a$.

Obs: expresse a resposta em termos dos parâmetros $F_0, a, m$ e $g$



3) **(3,0 pontos)** O planeta Júpiter é constituído por um núcleo sólido (raio $R_1$e densidade $\rho_1$) envolto por uma camada gasosa (raio externo $R_2$ e densidade $\rho_2 < \rho_1$). Uma sonda de massa $m$ se aproxima de Júpiter ao longo da reta que passa pelos pólos, de forma que a uma distância $z > R_2$ do centro do planeta, a sonda se encontra com velocidade $v_0$ aproximando-se de Júpiter, com os motores desligados. Considere Júpiter centrado na origem do sistema de coordenadas e o eixo $z$ orientado no sentido oposto ao vetor velocidade. Calcule:
   a) o potencial gravitacional devido a Júpiter na posição $z$ da sonda e a força gravitacional (vetor) exercida sobre a sonda naquele ponto;
   b) a velocidade da sonda quando esta começa a entrar na camada gasosa de Júpiter;
   c) a velocidade da sonda antes dela se chocar contra a parte sólida do planeta.

4) **(3,0 pontos)** Considere uma mesa lisa com um furo e uma corda inextensível de comprimento $L$ e massa desprezível em cuja extremidade encontra-se uma bolinha de massa $m$ que pode deslizar sem atrito sobre a mesa. Na outra extremidade da corda está presa outra bolinha, de massa $M$ (sob a ação do campo gravitacional uniforme $g$), como mostra a figura, sendo que a bolinha suspensa move-se somente ao longo da direção vertical.
   a. Encontre a Lagrangeana do sistema em termos das coordenadas generalizadas $r$ e $\varphi$.
   b. Encontre as equações de movimento do sistema. Quais são as grandezas conservadas? Justifique.
   c. Um movimento possível é o movimento circular de raio constante executado pela bolinha sobre a mesa. Usando a condição de equilíbrio, encontre o raio desta órbita circular em termos de uma grandeza que é conservada no sistema.



--- Folha Extra ---